الرياضيات

- التشاكل والتماثل
- المثاليات الأولية والعظمى
- معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية
- المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتـمـال
- نظرية رول نظرية التزايدات
 المحدودة الأوضاع غير المعينة
- طــرق إيجاد مقدرات النقطة
- التـكــامــل المعـتــل

خلود على حسن سلامة





www.darsafa.net

بِسُ لِللَّهِ اللَّهِ الرَّحْدَ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُلِ أَعْمَلُواْ فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ، وَالْمُؤْمِنُونَ ۗ وَسَتُرَدُّوك

إِلَّىٰ عَلِمِ ٱلْغَيْبِ وَٱلشَّهَدَةِ فَيُنْتِثَكُّمُ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

الصلابي

الرياضيات

- التشاكل والتماثل
- المثاليات الأولية والعظمى
- معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية
 - المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمال
- · نظرية رول نظرية التزايدات المحدودة الأوضاع غير المعينة
 - طرق ایجاد مقدرات النقطت
 - التكامل المعتل

خلود على حسن سلامة

الطبعة الأولى 2014م – 1435هـ



المملكة الأردنية الهاشمية رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (318/ 1/ 2011)

510

سلامة، خلود علي حسن الرياضيات: التشاكل والتماثل/ خلود على حسن سلامة. ـ. عمان: دار

صفاء للنشر والتوزيع، 2011.

() ص

ر. أ: 2011/1/318 الواصفات: الرياضيات

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا
 المصنف عن رأى دائرة المكتبة الوطنية أو أى جهة حكومة أخرى

حقسوق الطبع محفوظة للناشر

Copyright © All rights reserved

الطبعة الأولى 2014م — 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان ـ شارع الملك حسين ـ مجمع القحيص التجاري ـ تلفاكس 4612190 6 4612190

هاتف: 922762 6 4611169 ص. ب 922762 عمان _ 11192 الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing Telefax: +962 6 4612190- Tel: +962 6 4611169

P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan

http://www.darsafa.net

E-mail:safa@darsafa.net

ردمك ISBN 978-9957-24-707-2



الفهرس

٧	الفصل الأول: التشاكل والتماثل
4	التشاكل
١٦	التماثل
۲۳	قارينقارين
۲٥	الفصل الثاني: المثاليات الأولية والعظمى
٣١	غهيد زورن
٤٠	غارين
٤١	الفصل الثالث: معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية
٤٣	مقدمةمقدمة
٤٦	خصائص حلول المعادلات الخطية
٥٤	استعمال حل لإيجاد حل آخر
٥٧	المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة
٧٠	المعادلات اللامتجانسة
YY	الشبكات الكهربائية
۸٥	تطبيقات على الألعاب
41	التمارين
97	الفصل الرابع: المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمال
90	تعريف التجربة العشوائية
97	تعريف فضاء العينة
9V	تعريف الحادث
1 • £	أنواع فضاء العينة
11	نظرية التكرار الاحتمال
11 •	مسلمات الاحتمال



17	أمثلة محلولة
۲٥	القواعد الأساسية لطرق العد والتبادل
	تعريف التوافيق
	طرق سحب العينة
٣٩	الملحقا
الحــــــــــــــــــــــــــــــــــــ	الفصل الخامس: نظرية رول - نظــرية التزايــــــــــــــــــــــــــــــــــــ
	الأوضاع غير المعينة
	نظرية رول
٤٩	دستور التزايدات المحدودة
10 •	الأشكال غير المعينة
	قاعدة اوبيتال
101	مشتق تابع المركب
	تمارين محلولة
Y7Y YF	الفصل السادس: طرق ايجاد مقدرات النقطة
971	طريقة المعقولية العظمة
يب	طريقة التراكم لحساب تقدير المعقولية العظمى بالتقر
191	الخواص التقاربية لمقدر المعقولية العظمى
	تعريف المقدر الأكفأ تقاريبياً
	طريقة العزوم
	طريقة المسافة الصغرى
	تمارين
	الفصل السابع: التكامل المعتل
	التكامل المعتل من النوع الأول
	تبديل المتحول في التكامل المعتل من النوع الأول
	طريقة التجزئة في التكامل المعتل من النوع الأول
۲۳٤	معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول
	Mz



التشاكل والتماثل Homomorphism and Isomorphism



الفصل الأول

التشاكل والتماثل

Homomorphism and Isomorphism

سنتناول بالدراسة لنوعين من الدوال بين زمرتين إحداهما تسمى تـشاكل وهي دالة تحافظ على التركيب الداخلي للزمرة، أما النوع الثاني فهـو مـا يـسمى بالتماثل.

التشاكل Homomorphism :

φ (۱° ب) = φ (۱) و (۱) ، ∀ (ب € ك

نلحظ أن أ * ب هو ارتباط العنصرين أ، ب وفقا للعملية الثنائية * المعرفة على ك، أما $\phi(4)$ $\phi(4)$ $\phi(4)$ فهو ارتباط العنصرين $\phi(4)$, $\phi(4)$ و وفقاً للعملية الثنائية $\phi(4)$ المعرفة على $\phi(4)$ وليس المضرورة أن تكون $\phi(4)$ هي *. وعلى ذلك فإن التشاكل هو دالة تحقق أن صورة الارتباطات تساوي ارتباطات الصور. مثال:

نفرض أن (ك، *)، (ك، ٥) زمرتان معرفتان بالجدولين الآتيين، حيث ك = $\{ i, \gamma, -2 \}$ ، ق: ك \rightarrow ك معرف كما يلي: ق $(i, \gamma) = \gamma$ ، ق $(i, \gamma) = \gamma$ ، ق $(i, \gamma) = \gamma$





ع	ص	س	0
ع	ص	س	س
س	ع	ص	ص
ص	س	ع	ع

ج	ب	P	*
ج	ب	*	1
P	4	ب	ب
ب	1	ج	ج

نلحظ الآتي:

$$(+) = (-) = (-) = (-)$$
ق (ب) ق ق (ب) ق ق (ب)

$$\tilde{\mathfrak{o}}(-= * \psi) = \tilde{\mathfrak{o}}(4) = w = \tilde{\mathfrak{o}}(-) \tilde{\mathfrak{o}}(\psi)$$

∴ ق تشاكل أو هو مومور قزم من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (ك، ٥).

مثال:

بفرض أن (ك، *)، (كَ، 0) زمرتان، وأن هـ هو محايد العمليـة الثنائيـة 0، وأن ق: ك \rightarrow كَ معرف كما يلي:





هذه الدالة تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (ك، 0) لأن
$$\forall 0$$
 $\forall 0$ (ك، 0) $\forall 0$ ($) 0$))))))))))))

يسمى هذا التشاكل بالتشاكل البديهي (trivial homomorphism)، وتعد هذه الدالة هي الدالة الثابتة الوحيدة التي تحقق شرط التشاكل.

مثال:

نعلم ان النظام الجبري (ت، ،) زمرة، حيث ،، ت = $\{a^{o}: \ i \in o_{o}\}$ هي عملية الضرب، الدالة $\phi: (o_{o}, +) \to (c_{o}, -)$. والمعرفة بالصيغة التالية: $\phi(i) = Y^{o}, \ \forall \ i \in o_{o}$ هي تشاكل من الزمرة $(o_{o}, +)$ إلى الزمرة $(c_{o}, +)$ عيث:

مثال:

تعرف الدالة φ من الزمرة (ص، +) إلى زمرة الأعداد المصعيحة (صن، +ن) بمعار ن كما يلي:

هذه الدالة تشاكل حيث: \forall أ ، $\psi \in \omega$ ، ϕ (ϕ + ψ) = [ϕ + ψ] = [ϕ

$$(-1)_{i} \varphi + (-1)_{i} = \varphi(-1) + \varphi(-1) = \varphi(-1)$$

مثال:

بفرض أن $\phi:(-+, .) \rightarrow (-, +)$ دالة معرفة كما يلي:





φ(س) ≈ لوس، ∀ س ∈ ح ٔ

هذه الدالة تشاكل من الزمرة (ح+، ،) إلى الزمرة (ح، +) لأن ϕ (س.ص) = ϕ (س . ص) = ϕ (و ϕ) = ϕ (ϕ)

نظریة (۱) بفرض أن ϕ : (ك، *) \rightarrow (كَ، ϕ) تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (كَ، ϕ) وهـ) = هـ.

حيث هـ هو محايد العملية الثنائية هـ * محايد العملية الثنائية ٥.

 $(ij) \varphi (U^{-\ell}) = (\varphi (U))^{-\ell}, \forall U \in \mathcal{E}.$

البرهان:

$$(1) \dots \phi = (4 * 4) \phi (1) \dots \phi (n) \phi = (n) \phi (n)$$

$$(Y)$$
 (۱) $\varphi = (P) \varphi = (P) \varphi$ (۲)

$$\Delta \circ (P) \varphi = (\Delta \circ \varphi) \varphi \circ (P) \varphi$$
 من (۱)، (۲) غصل على $\varphi \circ (P) \varphi = (\Delta \circ \varphi) \varphi \circ (P) \varphi$

ولكن الزمرة تحقق قوانين الحذف ϕ (هـ) = هـ

$$\stackrel{\bullet}{\sim} \mathbb{A} = \varphi(\mathbb{L}^{\bullet} \ \mathbb{L}^{-1}) = \varphi(\mathbb{L}) \ o \ \varphi(\mathbb{L}^{-1})$$

وكذلك

$$(Y)$$
 $(U) = \varphi(U^{-1} \cup \varphi) = \varphi(U) = \varphi(U)$





تعریف: بفرض أن ϕ تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى الزمـرة (كَ، ϕ)، فإن المجموعة الجزئية ϕ (ك) من ك تسمى مدى ϕ (Rauge ϕ) وتعرف كما يلي:

مدی $\phi = \{\phi (U): U \in L^1\} \subseteq L^2$.

کما تسمى المجموعة ϕ -۱ (هــ) = {b \in ك: ϕ (b) = هـــ} \subseteq ك. بنواة التشاكل ϕ ويرمز لها بالرمز تشاكل ϕ .

نظرية (٢)؛ بفرض أن φ تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (ك، ٥) فإن:

أ) (مدى φ، ٥) زمرة جزئية من الزمرة (كَ، ٥).

ب) (تشاكل φ، *) زمرة جزئية ناظمية من الزمرة (ك، *).

البرهان:

۱) بفرض أن س، ص \in مدى φ ، سوف نبين أن س 0 ص $^{-1} \in$ مدى φ وذلك كما يلى:

 \forall س، ص \in مسلی ϕ \Longrightarrow A ، ψ \in A: ϕ (A) = س، ϕ (ψ) = ص کما أن ψ \in A: A

, '-(ب) ϕ = '-((ب) ϕ = (ب) من نظرية (١) غصل على ص

لأن φ تشاكل

 1 , 1 , 1

۵ س ٥ ص ا ∈ مدى φ

٠٠ (مدى φ، ٥) زمرة جزئية من الزمرة (ك، ٥).





 $(^{1}-_{}) \phi \circ (^{1}) \phi = (^{1}-_{}) \phi \circ (^{1}) \phi \circ \phi \circ (^{1})$ لأن ϕ تشاكل ϕ

= هـُ o هـُ = هـُ o هـُ = هـُ

نشاكل φ، *) زمرة جزئية من الزمرة (ك، *).

يتبقى إثبات أن (تشاكل φ، *) زمرة جزئية ناظمية، أي اثبات الآتى:

 $b''* \dagger * b + b \in \text{thild}$ ل ϕ ، $\forall f \in \text{thild}$

وهذا يتطلب أن يكون ϕ (ل ٔ * أ * ل) = هــَ والذي يثبت على النحو التالي.

 $\phi \circ (b^{-\prime} * \{*b) = \phi \circ (b^{-\prime}) \circ \phi \circ (4*b) = \phi \circ (b^{-\prime}) \circ \phi \circ (b) \circ ($

 $\phi = (U)^{-1} \circ (a \circ \phi \circ (U)) = \phi \circ (U)^{-1} \circ \phi \circ (U) = a \circ (U)$

 \cdot (تشاكل ϕ ، *) زمرة جزئية ناظمية من الزمرة (ك، *).

فظرية (٣): بفرض أن ق تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (ك، ٥) وكانت (م، *) زمرة جزئية من الزمرة (ك، *) ، (م، ٥) زمرة جزئية من الزمرة (ك، *) ، (م) فإن:

(ق(م)، ٥) زمرة جزئية من الزمرة (ك، ٥).

ب) (ق⁻¹(مَ)، *) زمرة جزئية من الزمرة (ك، *).





البرحان:

(أ) بفرض أن س، ص ∈ ق(م) سوف نبين أن س 0 ص ا ∈ ق(م)، كما يلي:

∀ س،ص ∈ ق(م) = € أ، ب ∈ م: ق (﴿)= س، ق (ب) = ص

وحيث أن ق تشاكل و (م، *) زمرة جزئية فإن:

∀ ۱، ب ∈ م ⇒ ۱، ب ا ∈ م ⇒ ۱ * ب ا ∈ م،

(ب) بفرض أن $\{i, p \in \mathbb{G}^{-1}(a)\}$ سوف نبين أن $\{i, p^{-1} \in \mathbb{G}^{-1}(a)\}$ كما يلي:

∀ أ، ب ∈ ق⁻¹(م) ⇒ E س، ص ∈ م: ق (أ) = س، ق (ب) =
 ص وحيث إن ق تشاكل، و (م، ٥) زمرة جزئية، كفإن:

 \forall w, $w \in \hat{a} \Longrightarrow w$, $w^{-1} \in \hat{a} \Longrightarrow w \circ w^{-1} \in \hat{a}$ $e[t: \vec{0}: (\hat{a} * + \vec{-1}) = \vec{0}: (\hat{a}) \circ (\vec{0}) = \vec{0}: (\hat{a}) \circ (\vec{0}) (\vec{0}))^{-1}$

= س ٥ ص ً (∈ مَ

٠٠ أ * ب أ ∈ ق أ (مَ).

وعلى ذلك فإن (ق ' (م)، *) زمرة جزئية من (ك، *).





التماثل Isomovphism :

تعریف: بفرض أن (ك، *)، (ك، 0) زمرتان وأن الدالة ق: ك ك تشاكل وتناظر أحادي (شاملة ومتباينة) فإن ق في هذه الحالة تسمى تماثل، كما يقال إن (ك، *) و (ك، 0) زم تان متماثلتان، ويرمز لذلك بالرمز ك \simeq ك.

مثال:

نعلم أن (ك، ،) زمرة، حيث ك = $\{1، -1، ي، -ي\}$ ، وعملية الضرب العادية، وأن $(م، \cdot)$ زمرة حيث $a = \{a, a, a, a, a, a, a\}$. هي عملية ضرب المصفوفات.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

نعرف Y : م ← ك كما يلى:

$$\Psi \left(\mathbf{a}_{1} \right) = \mathbf{1} \cdot \Psi \left(\mathbf{a}_{7} \right) = \mathbf{y} \cdot \Psi \left(\mathbf{a}_{7} \right) = -\mathbf{1} \cdot \Psi \left(\mathbf{a}_{3} \right) = -\mathbf{y}$$

واضح أن ٣ تناظر أحادي وأيضاً تشاكل لأنه يحافظ على العملية فمثلاً:

$$\Psi (q_{\gamma} \bullet q_{\gamma}) = \Psi (q_{\beta}) = -2$$

$$\Psi (q_{\gamma}) \cdot \Psi (q_{\gamma}) = Q \cdot (1-) = -Q$$

$$... \Psi \left(\begin{smallmatrix} a_{\gamma} & \bullet & a_{\gamma} \end{smallmatrix} \right) = \Psi \left(\begin{smallmatrix} a_{\gamma} \end{smallmatrix} \right) \bullet \Psi \left(\begin{smallmatrix} a_{\gamma} \end{smallmatrix} \right)$$

٠٠ م 🗠 ك ، ومن السهل التأكد عامة من ذلك.



١٩ب		*	مثال:
۹ ب		_	بفرض أن (ت، *) زمرة معرفة بالجدول الآتي، حيث
		?	سئال: بفرض أن (ت، *) زمرة معرفة بالجدول الآتي، حيث ت = {هـ، ١، ب. جـ.} وأن (م، •) هي الزمرة التي عرفـت في لمثال السابق وأن ٣: م ← ت معرف كما يلي:
1	ب	ب	Ψ (هـ) = م، ، Ψ (ب) = م، ، Ψ (ب) = م، Ψ
س ۱ ب	ج	ج	

إضافة إلى أن ٣ تناظر أحادي فإنه تشاكل، وعلى ذلك فــإن ٣ تماثــل، أي

م \simeq ت. من المثالين السابقين يتضح ان ك \simeq م \simeq ت.

مثال:

أن

1

ئ أحادي.

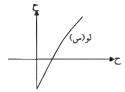
وأيضاً ∀ ص ∈ ح E س ∈ ح+ : φ (س) = لو(س) =ص

φ فوقي (شامل)، وعلى ذلك فإن φ تناظر أحـادي (انظـر رسـم هـذه
 الدالة)





 ϕ عاثل، أي أن ح ϕ



مثال:

برهن أن الزمرتين (ص، +) (ن – {٠}، ٠} غير متماثلتين.

البرهان:

نفسرض العكس، أي نفسرض أن الزمسرتين (ص، +) ، (ن – $\{*\}$ ، $*\}$ متماثلتان، وهذا يتطلب وجود دالة ق: ombdarrow ombdarrow ombdarrow وتناظر أحادي، وهذا يستوجب أن يكون العنصر ombdarrow ombdarrow

ومن حقيقة أن ق (هـ) = هـَ أي ق (٠) = ١ بالإضافة إلى فرضية أن الدالة أحادية فإن ذلك يتطلب أن يكون س = ٠، وهذا سوف يقودنا إلى تناقض حيث سيصبح ق(٠) = ١، ق(٠) = -١ وعلى ذلك فإنه لا يمكن تعريف دالة تماثل بين الزمرتين (ص، +)، (ن - {٠})، ٥) أي أن الزمرتين غير متماثلتين.

نظرية (١):

(أ) كل زمرة دورانية ذات مرتبة منتهية ن متماثلة مع زمرة الأعداد الصحيحة (صن، +ن) معيارن.





(ب) كل زمرة دورانية غير منتهية هي متماثلة مع الزمرة (ص، +).

البرهان:

(۱) نفرض أن (<١/>) *) زمرة دورانية ذات مرتبة منتهية ن، أي أن:

جر ≡ جر (mat ن) = جر = جر + جن، جـ ∈ ص.

ن ق أحادي.

أيضا ق فوقي، وبالتالي ق تناظر أحادي إضافة إلى ذلك، فـإن ق تـشاكل لأن

$$\ddot{b}(q^{s,l} * q^{s,l}) = \ddot{b}(q^{s,l+s,l}) = [s,l+s,l] = [s,l] + c [s,l]$$

(ن+ (ن ب (< ا>>) شا (< (< ا>>) ∴

(ب) في هذه الحالة تعرف الدالة ق: <١> \rightarrow ص كما يلي: ق(\uparrow^{\leftarrow}) = \rightarrow \uparrow^{\leftarrow} \in < \uparrow هذه الدالة تناظر أحادي لأن كل قوى المولد \uparrow هجب أن تكون غتلفة وإلا كانت < \uparrow منتهية. كما أن ق تشاكل حيث:





نظرية (٢):

بفرض أن ϕ : (ك، *) \rightarrow (ل، \times) تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (ل، \times) وأن Ψ : (ل، \times) \rightarrow (\rightarrow \oplus) تشاكل من الزمرة (ل، \times) إلى الزمرة (\rightarrow) أثبت أن (\rightarrow \rightarrow) = (\rightarrow) \rightarrow (\rightarrow) هو أيضاً تشاكل.

الرهان:

$$\forall \ \ \uparrow, \psi \in \mathcal{L} \Longrightarrow (\Psi \circ \varphi) \ (\ \ *\psi) = \Psi \ (\varphi \ (\ \ \) \times \varphi \ (\psi))$$

$$\dot{V} \circ \varphi \text{ timbly} = \Psi \ (\varphi \ (\ \) \times \varphi \ (\psi))$$

$$\dot{V} \circ \Psi \text{ timbly} = \Psi \ (\varphi \ (\ \) \otimes \Psi \ (\varphi \ (\psi))$$

$$= (\Psi \circ \varphi) \ (\ \) \otimes (\Psi \circ \varphi) \ (\psi)$$

$$\cdot \Psi \circ \varphi \text{ timbly on this of } (\ \ \) \otimes (\ \) \otimes (\ \)$$

ملحوظة:

إن تحصيل التناظر الأحادي هو أيضاً تناظر أحادي، وعلى ذلك فإذا كـان كل φ ۴ من في النظرية السابقة تماثل فإن:





هو أيضاً تماثل، وهذا يوضح لنا أنه إذا كان ك \simeq ل، ل \simeq جـــ فـــإن ك \simeq جـــ أى أن علاقة التماثل متعدية (ناقلة)

نظرية (٣):

(أ) علاقة التماثل = عاكسة.

(ب) علاقة التماثل عدماثلة (متناظرة).

البرهان:

(ص)

(ب) إذا كانت الزمرة (ك، *) متماثلة مع الزمرة (ك، 0) أي ك \simeq ك فإننا نرغب في إثبات أن ك \simeq ك وهذا ما سوف نصل إليه على النحو التالي: حيث ك \simeq ك إذا يوجد تماثل Ψ : ك \to ك، وسوف نثبت أن Ψ ⁻¹: ك \to ك هو أيضاً تماثل. نعلم أن معكوس التناظر أحادي هو أيضاً تناظر أحادي، وعله فإن:

متماثلة. و ك ان ك \simeq ك. أي أن علاقة التماثل متماثلة.





ملحوظة:

- (١) من النظرية والملحوظة السابقتان يتضح لنا أن علاقة التماثـل ما هـي إلا
 علاقة تكافة.
- (۲) مجموعة كل دوال التشاكل من الزمرة (ك، *) إلى نفسها تسمى
 اندومورفزمات (eudomorphisms) ويرمز لها بالرمز مور (ك) أو اندو (ك).

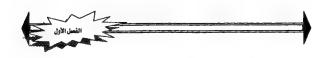
الـزوج (مـور (ك)، o) شبه زمـرة مجايـد حيـث مـور (ك) هـي مجموصة التشاكلات من الزمرة (ك، *) إلى نفسها، o هـي عملية تحصيل الدوال.

الرهان:

مثال:

 \forall 0, $3 \in ag$ (2) \Rightarrow 0 $3 \in ag$ (2).

لأن تحصيل التشاكل هو أيضاً تشاكل (نظرية (٢))، كما أن عملية تحصيل الدوال دامجة وأخيراً فإن راسم التطابق هو العنصر المحايـد. إذن (مــور (ك)، ٥) شبه زمرة بمحايد.



تمارين

(١) إذا كان φ تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى نفسها ومعرفاً بالقاعدة الآتية:

φ(!) = ! , ∀ ! ∈ ! îثبت أن (ك، *) زمرة إبدالية.

(۲) إذا كانت (ك، *) زمرة، $\P \in \mathcal{L}$ عنصراً محددا فأثبت أن الدائـة φ : $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ والمعرفة بالقاعدة التالية: φ (س) = $\P * m * \P^{-1} \ \forall \ m \in \mathcal{L}$ هي تشاكل.

(٣) بفرض أن (ك، *) زمرة، وأن (م، *) زمرة جزئية ناظمية منها وأن

مُ = {١ * م: م ∈ ك}

(i) أثبت أن (م، *) زمرة.

(ii) استخدم الفقرة (i) في إثبات أن ϕ : ك \rightarrow مَ تشاكل حيث:

 $\phi(\{\}) = \{ * \ \phi \ \ \forall \ \ \phi \in E \}$

 (٤) بفرض أن φ تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى نفسها، أثبت أن (ل، *) زمرة جزئية من الزمرة (ك، *) محيث:

$$\varphi = \big\{ \big\{ \in L \colon \phi \left(\big\} \big) = \big\{ \big\} \big\}$$





المثاليات الأولية والعظمى



الفصل الثاني المثاليات الأولية والعظمى

سندرس في هذا الفصل المثاليات الأولية والعظمى، ويتم التقيد بالحلقات التبديلية ذات العنصر المحايد.

تعریف: لتکن ح حلقة ول مثالیة فی ح یقال للمثالیة ل أنها مثالیة أولیة (prime) إذا كانت $b \neq -$ و لكل س، ص e = - حیث س ص e = - ل فیإن س e = - ل أو ص e = - ل أي إذا كان س e = - فیإن س ص e = - ل

مثال(١):

مثال (٢):

إذا كان ن عدد أولى فإن ن ص مثالية أولية.

مبرهفة: إذا كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد وكانت ل مثالية في ح، فإن ح/ل منطقة صحيحة إذا وإذا كانت فقط ل مثالية أولية.





البرهان:

العكس:

مبرهنة: إذا كانت ح منطقة صحيحة فإن {٠} مثالية أولية

البرهان:

لكل س \neq • فإن س ص \neq • وذلك لأن ح منطقة صحيحة، بهـذا فـإن س ص \notin • هـذا يعني أن $\{$ • } مثالية أولية.

مبرهنة: لتكن ح حلقة إذا كانت ل، ع مثاليتين في ح حيث ل \subset ع، فإن ع تكون مثالية أولية إذا وإذا كانت فقط 3/ ل مثالية أولية في الحلقة -3/ ل.

البرهان:

من المبرهنة ما قبل السابقة، ل مثالية أولية إذا وإذا كانت فقط ح/ل منطقة





صحيحة ولكن باستخدام المبرهنة ح/ع ≅ع/ل^{ح/ل}.

فإذا كانت ع مثالية أولية فإن ع / ل الم منطقة صحيحة.

ومرة أخرى باستخدام المبرهنة نفسها، يكون لدينا ع / ل / ل منطقة صحيحة إذا وإذا كان فقط ع/ل مثالية أولية.

تعريف: لنفرض أن ل مثالية في الحلقة ح.

تسمى المثالية ل بالمثالية العظمى (Maximal Ideal) إذا كانت ل ≠ح وأي مثالية أخرى ع تحوي ل، فإنها إما أن تكون ح أول.

أي بمعنى أن ل تكون مثالية عظمى إذا وإذا كانت فقط محتواه في مثاليتين هما ل، ح فقط.

مثال (٣):

مبرهنــة: في الحلقة ص، المثالية الرئيسة (ن) تكون مثالية عظمى إذا وإذا كــان فقط ن عدد أولى.

البرهان:

بفرض أن (ن) مثالية عظمى في الحلقة ص.





إذا كان العدد ن ليس أوليا، فإن ن = 0_1 ن عيث $1 < 0_2 \le 0_7 < 0_7$ ومـن ذلك نرى أن المثاليتان (0_1)، 0_2 تكون كالآتى:

$$(\mathfrak{i}) \subset (\mathfrak{i}_{\mathfrak{i}}) \subset \mathfrak{o}_{\mathfrak{i}} \qquad \qquad (\mathfrak{i}) \subset (\mathfrak{i}_{\mathfrak{i}}) \subset \mathfrak{o}_{\mathfrak{i}}$$

ولكن هذا يتناقض مع أن (ن) مثالية عظمى. بهذا فـإن ن يجـب أن يكــون عــدد أولي.

الاتجاه المعاكس: إذا كانت ن عدد أولى.

نفرض أن (ن) ليست مثالية عظمى من ص ولكن هـذا يعـني أنـه هنـاك احتمالات

حيث (ن) ⊂ (م) ⊂ ص

الاحتمال الأول غير وارد لأن ١ ليس مضاعف لأي عدد أولى.

بقي الاحتمال الثاني أي أن (ن) \subset (م) ولكن هذا يعني أن \circ = \circ محيث ك عدد صحيح أكبر من ١.

ولكن هذا يتناقض مع أن ن عدد أولى، بهذا تكون (ن) مثاليـة عظمـى في

مبرهنة: إذا كانت ل مثالية حقيقية حيث ل ≠ (٠)، ل ≠ ح في الحلقة ح فإن مثالية عظمي إذا وإذا كان فقط (ل، ١) = ح لكل ا ﴿ ﴿ ل

هنا (ل، ١) تعبر عن المثالية المتولدة بواسطة المجموعة ل (١).





البرهان:

نلاحظ أن ل \subset (ل، ﴿) \subseteq ح، فإذا كانت ل مثالية عظمى، فإن ذلك يعني أن (ل، ﴿) = ح.

الاتجاه المعاكس: إذا كان (ل، ١) = ح لكل ١ ١ ل

نفرض أن ع مثالية في ح حيث ل رع ع رح ح

إذا كانت أ أي عنصر في ع حيث أ ﴿ لَ فَإِنْ لَ ﴿ (لَ. أَ) ﴿ ع ﴿ حَ، ولكن (ل. أ) = ح، بهذا فإن ع = ح، أي أن ل مثالية عظمي.

المبرهنة القادمة من التتاتيج المهمة التي تحدد وجود المثاليات العظمى، ولكن في برهان هذه المبرهنة نحتاج لتمهيد زورن (Zem's Lemma) حيث أن هذا التمهيد من ضمن مجموعة المبادئ المسلمات المتكافئة التي تستعمل في مجالات متعددة في الرياضيات، حيث تسهل براهين العديد من المشكلات في مختلف الفروع وقد لا يكون ذلك صريحاً في بعض الأحيان على القارئ الراغب في معرفة المزيد عن هذه المبادئ الإطلاع على مراجع أخوى تهتم بدراسة هذه المبادئ والمسلمات.

تهيد زورن (Zern's Lemma

إذا كانت أمجموعة غير خالية ومرتبة ترتيباً جزئياً (Partially ordered) وكان لكل مجموعة جزئية ومرتبة ترتيباً خطياً (chain) م من ألها حد أعلى من أ، فإن أ يكون لها عنصر أعظمي.





مبرهنة: إذا كانت الحلقة ح متولدة بواسطة مجموعة منتهية من العناصــر، أي أن ح = < 1/1، (٢٠، ان >، فـــإن أي مثاليــة حقيقيــة تكـــون محتواه في مثالية عظمى

البرهان:

نفرض أن ل أي مثالية حقيقية في ح، إذا كانت أ عائلة من المثاليات الحقيقة التي تحتوي ل أي أن أ = $\{9: b \leq 9, a \neq \{9\}, a\}$ نلاحظ أن هذه العائلة غير خالية لأن $b \in A$.

إذا كانت {لي} أي مجموعة جزئية مرتبة ترتيباً خطياً من أ.

فالهدف الآن هو إثبات أن ∪لي عنصر في أ.

للوصول إلى الهدف نفرض أن ﴿، ب ∈ عي، ر ∈ ح

هذا يعني أنه توجد لي، لن مجيث $\{\in \mathbb{D}_{\wp}, \wp \in \mathbb{D}_{\wp}\}$ مرتب ترتيب خطيا، فإنه إما أن تكون $\wp \subseteq \mathbb{D}_{\wp}$ لن أو $\wp \subseteq \mathbb{D}_{\wp}$.

هذا يعني أن $\{, \, \psi \in \mathbb{D}_p \mid \{, \, \psi \in \mathbb{D}_p \in \mathbb{D}_p \}$ فإن:

ار، ١- ب ∈ لن ⊆ ل لني أو ار، ١-ب ∈ لني ⊆ للني

وهذا يثبت أن لاصي مثالية.

بقي إثبات الصي مثالية حقيقية في ح.

نفرض أن ∪صي = ح، وحيث أن ح متولدة بواسطة المجموعة





 $\{1,1,1,2,...,1_0\}$ هذا يعني أنه لكل مولد أب توجد مثالية لي ب من $\{1,1,2,...,1_0\}$ حيث أبد $\{1,1,2,2,...,2,1,2,...\}$ مرتبة ترتيباً خطيا وبذلك توجد مثالية تحتوى كل هذه المولدات لي ، أي أن لي $\{1,2,2,2,...,2,1,2,...\}$ تناقض.

إذن \cup لى eq ح أي أن \cup لى مثالية حقيقية وكـذلك نلاحـظ أن ل \subseteq \cup لى إذن \cup لى \in \cap

إذن باستخدام تمهيــد زورن يكــون للعائلــة أ مثاليــة عظمــى، بهــذا يكــون البرهان قد اكتمل.

تبجة: العنصر ﴿ فِي الحلقة التبديلية ذات العنصر المحايد يكون قابل للعكس إذا وإذا كان فقط لا ينتمي إلى أي مثالية عظمى.

مبرهنة: الحلقة ح التي بها مثالبة عظمى واحدة فقط تحتوي على العناصر إلى مدة 4, 1 . • فقط.

البرحان:

نفرض أنه يوجد عنصر جامد ﴿ حيث ﴿ ≠ ٢ .٠.

من العلاقة $\{^1 = 1\}$ نحصل على $\{(1-1) = 0\}$ وله ذا فيإن كيل مين $\{0, 1-1\}$ قواسم للصفر وعلمنا أن العنصرين $\{0, 1-1\}$ غير قابلين للعكس. ولكن هذا يعني أن كل من المثاليات التالية $\{1, 1-1\}$ تكون مثاليات حقيقية في $\{1, 1-1\}$ نكون مثاليات حقيقية في $\{1, 1-1\}$ نكون مثالية عظمى في $\{1, 1-1\}$ المثالية غلمى في $\{1, 1-1\}$ المثالية عظمى في $\{1, 1-1\}$ المثالية على ذلك فإن كل من $\{1, 1-1\}$





۱- ا ∈ م.

إذن ١ = ١ + (١ - ١) ∈ م

بهذا فإن م = ح ولكن هذا يتناقض مع أن م مثالية عظمى.

أي لا يوجد عنصر جامد في الحلقة ح عدا ١,٠١.

تعريف: الجدر اليعقوبي (Jacobsion radical) ويرمز له بـالرمز جــدر (ح) ويعرفه كالآتي جدر(ح) = م أمطيد على

ملاحظة: إذا كانت ح لهـا مثاليـة واحـدة عظمــى م فــان جــدر(ح) = م وتسمى الحلقة في هذه الحالة بالحلقة المحلية (local ring).

مبرهنة: إذا ر \in ح، فإن ر \in جدر (ح) إذا وإذا كان فقط 1-(1) قابل للعكس لكل 1

البرهان:

بفرض أن ر \in جدر(-). إذن لكمل مثالية عظمى م فإن را \in م لكمل ا= را = م فإن + (-) = م

أي أن م = ح ولكن هذا يتناقض مع أن م مثالية عظمى. بهذا فمإن ١ - ر لا يتتمي إلى أي مثالية عظمى، وباستخدام النتيجة السابقة فإن ١ - ر ل يكون قابل للعكس.

الاتجاه المعاكس: إذا كان ١- إر عنصر قابل للعكس لكل ١ ∈ ح.





نحاول إثبات أن ر ∈ جدر(ح).

نفرض أن ر < جدر (ح) هذا يعني أنه توجد مثالية عظمى م حيث ر∈ م. أي أن م رٍم + حر ر _ ح

ولكن م مثالية عظمي، وهذا يعني أن م + حر = ح

إذن ١ ∈ م + ح ر، عليه فإنه يمكن ايجاد ﴿ ∈ح، ب∈م حيث

١= ب + ار اي أن ١ - ار = ب ∈ م

ومن المعطيات ١- إر عنصر له معكوس.

إذن باستخدام النتيجة (١) نحصل على تناقض، ولهذا فإن ر ∈جدر (ح).

مبرهفة: إذا كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد، فكل مثالية عظمى تكون أولية.

البرمان:

بفرض أن م مثالية عظمى، فإذا كان س، ص \in ح حيث س ص \in م، فإذا كان س \in م. فإن م + ح س مثالية تحتوي على م أي أن

م ⊂م +ح س ⊆ح

وحيث أن م مثالية عظمى، فإن م + ح س = ح.

اذن ١ = ب + ر س ∈ م + ح س أي أن ١ € م + ح س

ولذلك فإن ١ = ب + رس حيث ب∈ م، ر∈ح، بضرب الطرفين في ص





غمل على ص = ص ب + رس ص ولكن رس ص \in م لأن م مثالية، س \in م وكذلك ص \in م إذن ص \in م

وهذا يثبت ان م مثالية أولية.

ملاحظة: عكس المبرهنة السابقة غمير صمحيح في الحالمة العاممة والمشال التمالي يوضح ذلك.

مثال (٤):

ح = ص × ص حلقة تبديلية ذات عنصر محايد.

نلاحظ أن ص × $\{ \cdot \}$ مثالية أولية في الحلقة ح ولكنها ليست مثالية عظمى، وذلك لأن ص + γ ص γ -.

مثالية في ح حيث ص × (٠} ⊂ ص × ٢ ص ⊂ ح

وعلى الرغم من ذلك ففي بعض الحالات الخاصة يكون العكس صحيح ولتوضيح ذلك نحتاج إلى المفاهيم الآتية:

لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد، إذا كانت جميع مثاليات الحلقة ح رئيسة، فيقال أن ح حلقة المثاليات الرئيسية.

وإذا كانت ح بالإضافة إلى ذلك منطقة صحيحة، يقال في هذه الحالة على ح أنها المنطقة الصحيحة للمثاليات الرئيسة (principal ideal domain).

مبرهفة: إذا كان ح منطقة صحيحة للمثاليات الرئيسة، فإن كل مثالية أولية ل في الحلقة ح بحيث $b \neq \{0\}$ تكون مثالية عظمى في الحلقة ح





البرحان:

 $\{oldsymbol{\cdot}\}
eq$ لتكن ل مثالية أولية في ح بحيث أن ل

بفرض أن ع أي مثالية أخرى في ح بحيث ل ⊆ ع.

x ان ح هي حلقة المثاليات الرئيسة فإنه يوجد س، ص x جيث ل x (س)، y = (ص). نلاحظ أن س x س x (س)، y = y = (ص).

إذن س = رص لبعض ر ∈ ح.

من المعطيات ل مثالية أولية، فهذا يؤدي إلى احتمالين $\mathbf{o} \in \mathbf{b}$ أو ردل. $\|\mathbf{v}\|_{2} = \|\mathbf{v}\|_{2}$

وبهذا بقي الاحتمال الثاني أي ر∈ ل ولكن هذا يعني أن ر = م س لبعض م∈ح. إذن ر = م ر ص وحيث أن ح تبديلية فإن ر = ر م ص

هنا قانون الحذف متحقق لان ح منطقة صحيحة، فمن العلاقة السابقة نجد أن م ص = ١. وهذا يعني أن ١ \in ع، أي أن ع = ح، وبالتالي ل مثالية عظمى في

نتيجة: إذا كانت ل $eq \{\cdot\}$ أي مثالية في الحلقة ص. فإن ل مثالية أولية إذا وإذا كانت فقط مثالية عظمى في ص.

تعریف: إذا کانت ح منطقة صحیحة، فإنه یقال عن العنصر $0 \neq 1 \in S$ و ج بأنه قابل للتحصیل (Reducible). إذا وجد عنصرین $1 \in S$





كليهما غير قابل للعكس بحيث إ = ١١ ١١

ويقال أن العنصر • ≠ ﴿ ∈ ح غير قابـل للتحـصيل (Irreducible) إذا كان ﴿ غير قابل للعكـس ولا يمكـن كتابـة علـى صـورة حاصـل ضـرب عنصرين في ح كليهما غير قابل للعكس.

ملاحظة:

نلاحظ أن كل عنصر قابل للعكس يكون غير قابل للتحليل وذلك ألنه إذا كان جد = $\{1, 1\}$ وهذا يعني أن جد = $\{1, 1\}$ وهذا يعني أن $\{1, 1\}$ عنصر قابل للعكس وبهذا فإن جد يكون غير قابل للتحليل.

مبرهفة: لتكن ح منطقة صحيحة للمثاليات الرئيسة، فالمثالية المولدة بواسطة عنصر غير قابل للتحليل في ح تكون مثالية عظمي في ح.

البرهان:

بفرض أن ن عنصر غير قابل للتحليل في ح، وبهذا فإن ن يكون غير قابل للعكس في ح أي أن ح \neq (ن).

بفرض أن ل أي مثالية في ح حيث (ن) \subseteq ل.

كما أن ح منطقة صحيحة للمثاليات الرئيسة فإنه يوجد س ∈ حيث ∪

أي أن (ن) \subseteq ل = (س) وكذلك ن = ن ، ا \in (ن) فإن ن \in (س).

أي أن ن = س, لبعض د∈ح. ولكن من المعطيات ن غير قابل للتحليل





فإنه إما د قابل للعكس أو س قابل للعكس إذا كان د قابل للعكس فإن س=ن c^- بهذا فإن c(ن). أي أن c(ن) = (ن).

إذا كان س قابل للعكس فإن ١ = س س $^{-1}$ \in ل أي أن ل = ح.

أي أن (ن) مثالية عظمي في ح.

ملاحظة:

باستخدام هذه المبرهنة يمكن إعطاء برهان لمبرهنة سابقة وذلك لأن المثالية الأولية المختلفة عن الصفر هي مثالية مولدة بواسطة عنصر أولى (أي عنصر غمير قابل للتحليل)، وبذلك تكون مثالية عظمى.



تمارين

- ۱) برهن أنه إذا كانت $i \neq i$ ، ۱، -۱ فإنه يكون عدد أولى إذا وإذا كانت فقط (i) مثالية اولية من (i)
- ٢) بفرض أن ح = ص ⊕ ص، حيث ص حلقة الأعداد الصحيحة فإن ح مع عمليق الجمع والضرب المعرفتين كالأتي:

 $(\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow) = (\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow) (\uparrow \downarrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow)$

تكون حلقة هي حلقة الجمع المباشر.

(١) هل ح منطقة صحيحة؟

(ب) اثبت أن <(١، ٠)> مثالية أولية من ح.

- ٣) برهن أنه في الحلقة ٢ص المثالية <٤> مثالية عظمى ولكنها ليست أولية.
- \$) إذا كانت U_1 ، U_7 مشاليتين من الحلقة ح حيث U_7 لا U_7 U_7 بين أن المثالية U_7 ليست أولية.
- ٥) بفرض أن ح هي حلقة الدوال الحقيقية المستمرة المعرفة على الفترة [٠،١] اثبت أن $\alpha = \{\delta \in -1, 0\}$
- ۲) لتكن ح حلقة تبديلية فإذا كانت ل، م مثاليتين من ح حيث ل ⊆م. اثبت أن م تكون مثالية عظمى من ح إذا وإذا كان فقط م / ل مثالية عظمى من الحقة ح / ل.





معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية



الفصل الثالث

معادلات الفروق الخطية ذات الرتية الثانية

مقدمة:

أعم صيغة لمعادلة الفرق ذات الرتبة الثانية هي:

ق(ن، صن، صن، مسند، صنه) = ١٠

وعلى خلاف المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية، تقبل المعادلة (١) الحل عادة بطريقة التتابع.

المثال (١):

خذ المعادلة:

فإذا جعلنا ص٠، ص١ القيمتين الابتدائيتين للمجهول صن، يكون:

$$1 \leq 1+ن صالح + 1 > 1$$

فإذا صارت هذه العبارة أقل من ١ يصبح صن٢٠٠ سالباً، وعندها تحتوي عبارة صن٢٠٤ على السالب، وليس لـذلك حـل حقيقي، ولا فائدة في





هذه الحالة من البحث عن حل بطريقة تجميع بسيط لاقترانات ابتدائية.

وإليك مثالاً آخر على الصعوبات التي تنشأ عن طريقة التتابع:

المثال (٢):

خذ المعادلة:

$$\frac{1}{2}$$
سا {جا [صن ۲+۵ صن ۱۱) $\frac{1}{2}$ = جتا (صن ۲+۵ صن ۲۰۰۰) من

فحتى لو عرف ص.، ص، لانجد طريقة لاستنتاج تعبير صريح للمجهول ص، بدلالة ص.، ص، وفي هذا الفصل سندرس صنفاً من معادلات الفروق لا تنشأ فيه المشاكل التي رأيناها في هذين المثالين.

في حين أن صن ٢٠٠ + صن ١٠٠ صن = ٠ غير خطية. وأعم معادلة خطية من الرئبة الثانية يمكن أن تكتب بالصيغة:

ص د ۲۰ ان ص د ۱۰ بن ص = قدر

فإذا كان إن، بن، قن معرفين لكمل ن ≥• وكمان ص•، ص١ معلمومين، يكون ص، = ق. – ﴿. ص. – ب. ص.،

ص = ق - ف ص ١ - ب ص ١٠٠٠٠٠٠٠

فالتتابع المعرف على هذا النحو لا ينتهي. فلدينا اذن النظرية التالية عمن المعادلات الخطية.





النظرية (١):

$$(\mathfrak{P})$$
 صن $+$ ان صن $+$ بن صن $+$ قن $+$ بن صن $+$ قن صن $+$ $+$ بن صن $+$ عقق ص. $+$ حد، $+$ ص $+$ حد،

ومطابقة لمصطلحات واردة سابقاً، نسمي المعادلة (٣) متجانسة اذا كـان قن=• لكل قيم ن، والا فهي غير متجانسة. وإذا كان أن، بن ثابتين لا يتغيران بتغير ن نقول ان المعادلة (٣) لها معاملات ثابتة.

ورغم أن النظرية (١) تضمن حلاً وحيداً لمسألة القيم الابتدائية الخطية، الا اننا في البنود القليلة التالية سنبحث عن وسائل لإيجاد الحمل العام للمعادلة (٣) بطريقة لا تتضمن التتابع المستمر وفي اثناء ذلك سنكتشف صلات هامة بين حلول معادلات القروق ذات المرتبة الثانية ونظيراتها من المعادلات التفاضلية.

التمارين:

في الثمارين من ١ إلى ١٠ ميز معادلة الفروق الخطية من غير الخطيـة، واذا كانت خطية، بين أمتجانسة هي أم غير متجانسة، وهل معاملاتها ثابتة أم متغيرة:





V'' = 0 V' = 0 V'' =

 $\Upsilon = \overline{u_{i+1} - u_{i+1} - u_{i+1}} - v_{i+1} - v_{i+1}$

١١. في المعادلة المتجانسة الخطية.

صن+۲ + أن صن+۱ + بن صن = ٠

بين انه اذا كانت قيمتان متتاليتان للحل صن صفراً كان صن = · لكل قيم ن.

١٢. على فرض أن سن، صن، حلان للمعادلة المتجانسة الخطية.

صد+۲ + أن صن+۱ + بن صن = ۱،

وان س = ص = ٠ حيث ك عدد صحيح ما، فبين أن هنالك ثابتاً ما، ح حيث ص = ح س لكل قيم ن.

* خصائص حلول المعادلات الخطية.

نبدأ بالمعادلة المتجانسة.

والتوفيق الخطي للحلين سن، صن للمعادلة (٤) هـ و أيـضاً متنالية أس. + ب صن، أس، + ب صن، حيث أ، ب عدان حقيقان. ويكون الحلان سن، صن للمعادلة (٤) مستقلين خطياً إذا كان





ل $m_0 + a$ صن = • فقط مع ل = a = • وهذا يعادل قولنا ان ليس هنالك عدد ثابت حـ حيث $m_0 = -2$ حدد ثابت حـ حيث $m_0 = -2$ توسيعهما حتى يشملا ك حلولاً للمعادلة (٤).

النظرية (٢):

كل تجميع خطي لحلول المعادلة (٤) هو أيضاً لحل هذه المعادلة.

البرهان:

نحتاج فقط أن نبرهن أنه إذا كان سن، صن حلين للمعادلة (٤) كان عن ≈ ل سن + م صن حلاً لها.

عند+ الزعند+ بنعن = ل سند+ + مصند+ + الن (ل سند+ + م صند+) + بن (ل سن + م صن).

= ل (سن+۲ + أن سن+۱+ بن سن) + م (صن+۲ + أن صن+۲ + بن صن)=

نستطيع الآن ان نعين مقابلاً للرنسكية في معادلات الفروق وهي القيسارية (Casoration) فاذا كان سن، صن حلين للمعادلة (٤)، فإن قيسارية سن، صن

هي

ق (س، ص) = سن صن+۱ – سن+۱ صن............ (۵)

وقد برهنا ان المعادلة التفاضلية المتجانسة الخطية ذات الرتبة الثانية لها حلان مستقلان خطياً. وينطبق هذا على معادلة الفرق المتجانسة الخطية ذات الرتبة شرط الا يكون اي من المعاملات بن في المعادلة (٤) صفراً. وتظهر الحاجة إلى هذا الشرط واضحة عندما نتصور تلاشى كل المعاملات بن اذ





عندها تصبح المعادلة (٤) معادلة من الدرجة الأولى ولا يكون لها حلان مستقلان خطياً. والنظرية التالية تبين لماذا كمل بن يجب أن يكون غير الصفر وسنترك برهانها للطالب.

النظرية (٣):

اذا كان احد المعاملات بن، وفي المعادلة (٤) صفراً، فعندها لا يكون للمعادلة (٤) حلان مستقلان خطياً. والحقيقة التالية تشابه النتيجة (٣):

النظرية (٤):

افـــرض ان سن، صن حـــلان للمعادلـــة (٤) وأن بن \neq • لكـــل ن= (π, τ, τ) فعندها يكون سن، صن مستقلين خطياً اذا وفقـط إذا كـان (π, τ, τ) .

البرهان:

نسدأ باثبات أن ص (س،ص) لا تساوي صفراً وأن ص(س،ص) ≈ • لكل قيم ن فمن المعادلة (٥) نجد أن:

رد) صندر صندر مسندر مسندر مسندر مسندر مسندرد المستندر المست

ولأن سن، صن، حـــلان للمعادلـــة (٤) يمكــن أن نعــوض عـــن سن٠٠٠، صن٠٠٠ في (٦) بقيمتها كما يلي:

فينتج ١٠٠ = س١٠١ (- إن ص١٠١ - بن صن)-ص١٠٥ (- إن س١٠٠ - بن سن)

= بن [سن صن١٠ - سن١٠ صن]





أي أن قن المباه = بن قن المباه = بن قن المباه = بن قال المباه = بن قال المباه = بن قال المباه = بن ق

[لاحظ أن التشابه بين المعادلة (٩) والمعادلة الرنسكية] وكمما علمنـا فـإن

المعادلة (٩) حلها ق $_{0+1} = (\prod_{y=0}^{4} - \mu_{y})$ ق.

فلأن $بي \neq 0$ حسب الفرض، فان 0 اما ان يكون دائماً صفراً أو الا يساوي صفراً أبداً، حسب كون 0. صفراً أولاً.

نستطيع الآن ان نبرهن على النظرية ببيان ان الحلين سن، صن للمعادلة (٤) يكونان مستقلين خطياً إذا، وفقط إذا كان ص (س، ص) = • (لكل قيم ن).

فإذا كان سن، صن غير مستقلين خطياً فهنالك عدد ثابت حـ حيث صن = حـسن لكل قيم ب فيكون.

رن (س، ص) = سن صن+ - صن سن+ ا

= سن (ح سن+) - (ح سن) سن+ = ٠

وهنالك حالتان للدراسة، حسب كون س. 🗲 * ، س. = •

الحالة (١):

اذا كان س، 4 و فان المعادلة (١٠) تتضمن أن:

$$-1$$
 $m = \frac{m}{m}$ $m = 1$





فليكن جـ = ص./س.، فيكون ص. =
$$\left(\frac{\omega_{0}}{\omega_{0}}\right)$$
س. = حـ س.

ومن المعادلة (٤) ينتج أن

الحالة الثانية. إذا كان س.=،، فإما أن يكون س،=، أو ان يكون س. + فإذا كان س، + فمن المعادلة (٤) ينتج أن س+ ، + وهكذا، لكل قيم ن فيكون س+ ، + مصن وتكون الحلول متناسبة. وإذا كان س+ ، فمن المعادلة (١٠) يكون.

$$-\infty_1 = \left(\frac{-\infty_1}{\omega_1}\right)$$
 ص $= -\infty_1$ وباقي الحل كما في الحالة الأولى.

ولإكمال البحث في المعادلات المتجانسة سنثبت النظرية التالية:

النظرية (٥):

إذا كان سن، صن حلين مستقلين خطياً للمعادلة (٤) وكان عن حلاً اخــر لها. فإن ع_ن يمكن ان يكتب بصيغة تجميع خطي للحلين سن، صن.





البرهان:

بحصولنا على هذه النتيجة، يمكن أن نتكلم عن الحل العام للمعادلة (٤) فهو:

لننظر الآن باختصار في المعادلة غير المتجانسة:

صن + + †ن صن + + بن صن = قن(۱۳)....النظرية (٦):

اذا كان $صن حلاً للمعادلة (<math>\mathbf{r}$)، وكان \mathbf{r} ، وكان \mathbf{r} خل آخر، كان عن = \mathbf{r} – \mathbf{r} من حلاً للمعادلة (\mathbf{r}).





البرهان:

$$\begin{aligned} & \text{Lexid 36+7} + \frac{1}{16} \cdot 3_{6+1} + \psi_{1} \cdot 3_{6} \\ & = (\omega_{6+7} - \omega_{6+7}) + \frac{1}{16} \cdot (\omega_{6+1} - \omega_{6+1}) + \psi_{1} \cdot (\omega_{16} - \omega_{16}) \\ & = (\omega_{6+7} + \frac{1}{16} \cdot \omega_{6+1} + \psi_{1} \cdot \omega_{16}) + (\omega_{6+7} + \frac{1}{16} \cdot \omega_{6+1} + \psi_{1} \cdot \omega_{16}) \end{aligned}$$

بعد ان عرفنا النظرية، يتضع لنا ان الحصول على جميع حلول المعادلة (١٣) غير المتجانسة لا يقتضي الا الحصول على حل واحد للمعادلة (١٣) بالاضافة إلى الحل العام للمعادلة (٤)، كما هو الحال في المعادلات التفاضلية.

تمارين:

في الثمارين (١) إلى (٥) تحقق أن سن، صن، حلا لكل معادلة فرق، ثم احسب قيساريتها.

$$1 = 0.00 \cdot ^{0} Y = 0.00 \cdot ^{0} = 0 \cdot ^{0} \cdot ^{0}$$

$$Y : \omega_{i+1} - 3\omega_{i+1} + 3\omega_{i} = *$$
 $Y : \omega_{i} = Y^{i}, \omega_{i} = Y^{i}$

$$! \cdot 0$$
 (ن+۲) (ن+۲) صن $= * 1 \cdot 0$ عن $= * 1 \cdot 0$ ن ا

٥.
$$ص ن - \gamma - V ص ن + + ۱ ۲ ص ن = ه ٤ س ن = γ^{i} ، $ص ن = ٤^{i}$$$

 7. إذا كان س ن حلاً للمعادلة صن٠٠٠ + أن صن٠٠٠ + بن صن= قن، وكان عن حدلاً للمعادلة <math>صن٠٠ + أن صن٠٠ + بن صن = فن، فبين أن سن + عن





حل للمعادلة ص $_{0+7}+$ أن ص $_{0+1}+$ بن ص $_{0}=$ ق $_{0}+$ ف $_{0}$ هـذا هـو مبدأ التراكم في معادلات الفروق.

٧. هذه معادلة متجانسة من الرتبة الثالثة:

صن+ النصن+ + بن صن+ + جن صن = ٠

بين انه إذا كان سن، صن، عن حلولاً لها كانت اي ضمة خطية لهذه الحلول حلاً آخر.

٨. في معادلة التمرين ٧ نعرف القيسارية كما يلي:

جن الن (س، ص، ع)

واستنتج انه إذا كان جن ≠ • لكل ن = •، ١، ٢،.. كــان من (س، ص، ع) صفراً دائماً، أو انه لا يكون صفراً أبداً.

- 9. في التمرين ٨، بين انه إذا كان جين \neq لكل قيم ن، وكان كل مين الحلمول $_{00}$ $_$
- ١٠. في التمرين ٩، إذا علمنا ان الحلول الثلاثة مستقلة خطيا وان غن حل آخر فين أن هنالك ثوابت ٩، ب، جـ حيث غن = ٩سن + ب صن + جـعن لكل ن.





١١. بين انه إذا كان سن، صن حلين للمعادلة غير المتجانسة ذات الرتبة الثالثة
 صن ٢٠٠٠ أن صن ٢٠٠٠ بن صن ١٠٠٠ جن صن = قن.

كان $a_{ij} = m_{ij} - a_{ij}$ كان $a_{ij} = a_{ij}$ المتجانسة.

١٢. على فرض أن للمعادلة: صن٠٠٠ + إن صن٠١٠ + بن صن= ١٠ ص. = ١

حلاً غير الصفر محقق الشرط صe = * حيث ك عدد ما > *، اثبت ان e = * في اى حل آخر سن لهذه المعادلة.

١٢. اثبت النظرية (٣).

* استعمال حل لإيجاد حل آخر.

لنأخذ المعادلة المتجانسة الخطبة.

صد+۲+ أن صن+۱+ بن صن= ۱، بن خ ١

فاذا كانت المتاليتان أن بن ليست ثوابت فليس هنالك طريق عامة الايجاد حلول. ولكن، كشأننا في المعادلات التفاضلية المتجانسة ذات الرتبة الثانية، إذا عرفنا حلاً يمكن أن نجد حلاً يمكن أن نجد حلاً آخر مستقلاً عنه خطياً.

افرض ان سن حل معروف غير الصفر، للمعادلة (١٤)، وسنبحث لها عن حل آخر بالشكل:

صن = فن صن،

حيث فإن متتالية غير ثابتة يراد معرفتها. فلنأخذ متتالية أخرى.

كن = فن ا - فن الله عن الله عن



الفعل الثالث

ولتتذكر أن القيسارية v_{ij} (س، ص) هي بالشكل v_{ij} (س، ص) = سن اسنا v_{ij} - سنا صن حيث سن، صن أي حلين للمعادلة (١٤)، ولنفرض أن صن هو فعلاً حل. فنحصل بعد النبسيط الجبري على:

$$v_{i}$$
 (w_{i} w_{j}) = w_{i+1} w_{i} ($\frac{w_{i+1}}{w_{i}} - \frac{w_{i}}{w_{i}}$)

الصيغة التي تلت المعادلة (٨) ينتج كن =
$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{0}^{\infty}}{\int_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty}}$$
 الصيغة التي تلت المعادلة (٨) ينتج كن = $\frac{1}{2}$

حيث فرضنا ان v. +1، وهذا مقبول لأن الحل المجهول v مستقل عن v ومعرف حتى v v ومعرف حتى v v أبتاً ما.

وأخيراً، من (١٩) نستنتج معادلة فرق من الرتبة الأولى هي:

$$(\gamma \bullet) = \frac{\int_{-\zeta_0}^{\zeta_0} \prod_{i=0}^{\zeta_0} \sum_{j=0}^{\zeta_0} \sum_{i=0}^{\zeta_0} \sum_{j=0}^{\zeta_0} \sum_{j=0}^{\zeta_0} \sum_{i=0}^{\zeta_0} \sum_{j=0}^{\zeta_0} \sum_{i=0}^{\zeta_0} \sum_{j=0}^{\zeta_0} \sum_{i=0}^{\zeta_0} \sum_{j=0}^{\zeta_0} \sum_{j=0}^{\zeta_0} \sum_{i=0}^{\zeta_0} \sum_{j=0}^{\zeta_0} \sum_{i=0}^{\zeta_0} \sum_{j=0}^{\zeta_0} \sum_{$$

وهذه، كلها كما يلي: فن = ف. +
$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i$$
(۲۱)

ولأن سن، بن ليس أي منها صفراً فان دن ليست صفراً، مهما تكن ن. لذا فان فن ليست عدداً ثابتاً اذن فان صن = فن سن هي حل آخر للمعادلة (١٤) مستقل خطياً عن الحل سن.





الثال (١):

 $o_{000} + 3 o_{000} + 3 o_{000} = 0$ هنالك حل ليسهل تبنيه: $o_{000} = 7^{\circ}$ (سندرس المزيد عن المعادلات ذات المعاملات الثاتبة في البندين التالين).

لنجعل صن = فن سن حلاً آخر، فمن (٢٠) ينتج:

$$c_{i} = \frac{\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1}} + \int_{0}^{1} \frac{3^{i}}{\sqrt{1}} = \frac{3^{i}}{\sqrt{10^{i}}\sqrt{10^{i}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{i}}} \frac{3^{i}}{\sqrt{10^{i}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{i}}}$$

المثال (٢):

لیکن $ص_{0+1} - (\dot{0} + 1) (\dot{0} + 1)$ ص $_{00} = 1$ یسهل أن نتحقق ان 0 = 1 ایکن 0 = 1 یکون:

$$c\dot{v} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \dot{v}_{i}}{v_{i}v_{i}v_{i}} = \frac{(-1)^{0}(\dot{v}+1)\frac{\dot{v}_{i}}{1}}{(\dot{v}+1)\frac{\dot{v}_{i}}{1}\frac{\dot{v}_{i}}{1}} = (-1)^{0}$$

$$\dot{v}_{0,i}v_{0} = \dot{v}_{0} + \sum_{i=1}^{N} c_{i} = \dot{v}_{0} + \frac{1-(-1)^{0}}{\gamma}, \, \dot{V}_{0} \, \text{thrilly} \, \text{lattenus}$$

$$1 + \dot{q} + \dot{q}^{\gamma} + \dots + \dot{q}^{C-1} = (1 - \dot{q}^{C})/(1 - \dot{q}), \, \dot{v}_{0}^{\gamma}, \, \dot{v}_{0}^{$$



= جـ، ن! + جـ، (-١)ن ن! لاحظ ان ن!، (-١)^٥ ن! مستقلان خطياً لأن (-١)^٥ ليس ثابتاً.

التمارين:

في كل من التمارين التالية معادلة فرق وحل لها والمطلوب إيجاد حل آخـر مستقل عنه خطياً:

$$^{5}(Y-) = ^{3}$$
. صن $_{0} + ^{4} + ^{4}$ صن $_{0} = ^{4}$ ، سن $_{0} = ^{4}$

$$\Upsilon=0$$
 سن = ۱ صن + ۲ صن = ۱ مسن = ۲ مسن = ۳ مسن = ۳

$$\frac{\pi}{v}$$
 ن نجنا ن $\frac{\pi}{v}$. مین = عنا ن نجنا ن 3.

0
 المن $^{+}$ + $^{+}$ من $^{+}$ المن $^{+}$ + $^{+}$ من $^{-}$ ، من $^{-}$ ، من $^{-}$

$$^{1-i}$$
۲. صن $_{i+1}+7$ ص $_{i+1}+9$ ص $_{i}=*$ ، سن $_{i}=(0\,\dot{0})$ ۴ $^{i-1}$

$$!$$
ن = مین -1 مین -1 مین -1 مین -1 مین -1 مین -1 مین -1

$$!$$
ن = سن $!$ اسن $!$

المادلات المتجانسة ذات الماملات الثانية:

حالة الجذور الحقيقية

ندرس الآن المعادلة المتجانسة الخطية ذات المعاملات التالية:

ص ن+ ۲ (ص ن+ ۱+ ب ص ن = ۱ ، ب غ ب ، ۲۲).... + ۲۲)





ونعطي طريقة سهلة لإيجاد حل عام لها.

اما معادلة الرتبة الأولى $ص₀₊₁ = \{ ص₀₊₁ \}$ ، فقد رأينا ان حلها العـام هـو $ص₀ = \{ ^{6} ص$. فليس مستنكراً اذن ان نحـزر ان هـنـاك حلـولاً للمعادلة ($\Upsilon\Upsilon$) بالشكل $ص₀ = <math>\chi$ حيث χ ذات قيمة ما (حقيقية أو مركبة). فنعـوض χ في المعادلة ($\Upsilon\Upsilon$) فيتنج:

• =
$$^{5}\lambda$$
 ψ + $^{1+5}\lambda$ + $^{1+5}\lambda$

ولأن هذه المعادلة تصح لكل ن > • فهي تصح عند ن = •، فيكون 4 لم أ + 4 ب 4 ب 4 ب 4 ب 4 ب 4

وهذه هي المعادلة المساعدة، لمعادلة الفرق (٢٢) وهمي تطابق مساعدة المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية، والتي تم استنتاجها سابقاً، فهنا أيضاً جذرا المعادلة.

$$(7\xi) \qquad \frac{\overline{-\xi-\gamma} \sqrt{\gamma-\beta-\gamma}}{\gamma} = \chi \lambda \quad \sqrt{\frac{-\xi-\gamma}{\gamma} \sqrt{\gamma+\beta-\gamma}} = \chi \lambda$$

وهنا أيضاً امامنا ثلاث حالات

الحالة الأولى:

 7 و ق هـذه الحالة هنالـك جـذران حقيقيـان غتلفـان، 7 بعطيهمــا (۲۶)، فيكــون سن = 7 ، صن = 7 حلــين للمعادلــة (۲۲) لأن 7 الأن 7 (س، ص) = 7 سن، اصن 7 - صن صن، 7 7 7 (7 (7 7)، فــان 7 (7) ليست صفراً الا في حالة عندما تكون 7 أو 7 صفراً. وهــذا لا يــتم الا إذا كانت 7 و هذا ما استبعدناه، اذن فقد برهنا النظرية التالية:



الفعل الثانث

النظرية (٧)

اذا كان $\{^{1}-3\
ho>0$ كان الحل العام للمعادلة (٢٢) هو:

(Ya) $\psi + \psi + \chi \psi + \psi + \chi \psi$

(18) حیث جر، جر ثابتان λ ، λ کما فی

المال (١):

خذ المعادلة سن+ ۲+ 0 سن+۱ - ۳ سن= •

المعادلة المساعدة هي $\lambda^7+\lambda - \lambda = 0$ وجنراها $\lambda_1=7$ ، $\lambda_2=-1$ ، فالحل العام:

صن = جر (٦) + جر (-١) . فاذا اعطینا الشرطین الابتدائین ص. = -1 ، مثلاً غصل علی المنظومة:

جه + جه = ۳،

۱ جر - جرم = ۱۱،

وحلها الوحيد جـــ،=٢، جـــ،=١. فالحل الحناص هو صن= ٢× ٦٠ + (-١)^ن الحالة الثانية:

 7 فلدينا الحمل 8 هنا يتساوى جمدرا المعادلة (8) فلدينا الحمل 8 حيث 8 - 9 . 8 ويمكن الحصول على حل آخر مستقل خطياً عن همذا بطريقة البند السابق. نجعل 8 في 8 في 8 من 8 البند السابق. نجعل 8 في 8 في 8 من 8 أن من 8 والبند السابق. نجعل 8





$$\varepsilon_{c} = \frac{\prod_{v=1}^{n} v_{c}}{\omega_{v,u}\omega_{v}} = \frac{1}{\chi^{v,u}} = \frac{1}{\chi^{v,u}} \cdot \text{eld} \quad (4/Y)^{Y}, = (-4/Y),$$

$$\psi_{c}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{(1/1)^{3/2+1}} = \frac{1}{(1/1)^{3/2+1}} = \frac{1}{(1/1)^{3/2+1}} = \frac{1}{(1/1)^{3/2+1}}$$

فاذن فن = ف. + $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = i / \lambda$ (نجعل ف = •) فیکون $o_{i,j} = i \lambda^{(-)}$.

النظرية (٨):

(77) صن = جہر (37) + جہر ن (37) صن = جہر (37) عندان اعتباطیان.

الثال (٢):

ولها جذر مزدوج هو $\lambda = \gamma$.

فالحل العام ص = جم ۳ + جم ن۳ = ۳ (جم + ن جم) فندخل الشرطين الابتدائيين فينتج:





جـر = ٥،

٣ = ١٢ = ١٢

فالحل الوحيد هو جـ، = ٥، جـ، = ١٠ فالحل الخاص للمعادلة (٢٧) هـ و $^{-1}$ من $^{-1}$ $^{-1}$ من $^{-1}$ $^{-1$

التمارين:

في التمارين من ١ إلى ١٠ اوجد الحل العام للمعادلة المعطاه، وإذا اعطيت شروطاً ابتدائية فأوجد الحل الوحيد الذي يحققها:

$$V = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = V$$

$$\Upsilon = 1$$
من $1 = 1$ من $1 = 1$





11. في دراسة للأمراض المعدية احتفظت احدى المدارس بسجل عن حوادث انتشار الحصبة. وقد قدر ان احتمال حدوث حالة عدوى واحدة على الأقل بعد ن اسابيع من انتشار المرض هي حن = حن - $\frac{1}{0}$ حن - $\frac{1}{0}$ فاذا كان حد - $\frac{1}{0}$ عن - $\frac{1}{$

بعد كم اسبوع يصبح احتمال حدوث حالة جديدة من الحصبة اقــل من ١٠ في المثة؟

١٢. تعسرف إعداد فيبوناتشي بأنها متتالية من اعداد بحيث ان كمل واحدد منهما يسساوي مجموع مسابقيه والأعداد الأولى في المتتالية هي ١٠١، ٢٠٣٠، ٥، ١٣٠٨...

أ) ضع معادلة فرق ذات قيمة ابتدائية تتولد بها هذه الأعداد.

ب) أوجد حل هذه المعادلة.

جا بين ان النسبة بين كل عددين متتالين منها تقترب من (١+ /٥/ ٢ عند ن → ∞ تسمى هذه النسبة بالنسبة الذهبية. وقد كانت تستعمل في فن المعمار الاغريقي القديم كلما انت ابنية مستطيلة فقد كان يعتقد انه عندما تكون هذه هي النسبة بين ضلعي المستطيل يكون منظره اكثر متعة للعين.

١٣. يتنافس فصيلتان من حشرات الفواكه وهما تعيشان في ظروف موائمة. وفي كل جيل تتزايد الفصيلة ب بمقدار ٢٠ في المئة وتزداد الفصيلة ب بمقدار ٢٠ في المئة وتزداد الفصيلة ب بمقدار ٤٠ في المئة. فاذا بدأتا بألف حشرة من كل فصيلة فكم يكون مجموعهما الكلمي بعد ن أجيال؟





١٤. خذ معادلة الفرق التالية، وهي ن من الرتبة الثالثة:

أ) بين أن $m_0 = \lambda^0$ يكون حلاً للمعادلة إذا كانت تحقق المعادلة البديلة.

جـ) إذا كان ٨/ جذراً مزدوجاً فبين ان الحل العام هو

د) إذا كان λ جذراً مثلثاً فبين ان الحل العام هو

في التمارين التالية استعمل نتائج التمرين (١٤) لا يجاد الحل العام لكل من المعادلات التالية:





العادلات التجانسة ذات العاملات الثابتة.

حالة الجذور المركبة

$$(YA)$$
..... $B = \infty - \infty = \gamma \lambda + B = \gamma \lambda$

ولأن الحلول ستكون من النوع λ^{6} يجب أن نين كيف تحسب قوى الأعداد المركبة ويصبح هذا سهلاً جداً اذا عبدنا عن هذه الاعداد بالشكل القطبي: فاذا كان

$$g = (a^{2})^{\theta}$$
 کان $g_{i} = (a^{2})^{\theta} = c^{i} a^{2}$

$$\theta$$
 نکن هـ 2 ن 0 = جتا ن θ + ي جا ن

اذن فقد استنتجنا القاعدة التالية المسماة بقانون دي مو يفر

$$($$
 (۲۹) θ ن جا ن θ + چا ن θ = جتا ن θ جتا ن θ جتا ن θ

الثال (١):

$$\overline{Y}V = \overline{Y}B + \overline{Y} \circ c V = V$$
ليکن ع = ۱ + ي. فيکون ر

$$\theta = dU^{-1} (\infty/B) = dU^{-1}$$
 . فیکون ع V^{-1} اذن θ

$$\underbrace{ \mathsf{Y} + \mathsf{Y} - = (\frac{\pi^{\mathsf{Y}}}{\underline{\epsilon}} \ \, \mathbf{l} + \underbrace{ \mathsf{L}}_{\underline{\epsilon}} + \underbrace{\pi^{\mathsf{Y}}}_{\underline{\epsilon}} \ \, \mathbf{l} + \underbrace{\mathsf{L}}_{\underline{\epsilon}}) \ \, \bar{\mathsf{W}} \ \, \mathsf{Y} = \underbrace{{}^{\mathsf{L}}/\pi \, {}^{\mathsf{T}}_{\mathsf{G}}}_{\phantom{\mathsf{G}}} \ \, \mathbf{l}}_{\phantom{\mathsf{G}}} \, \, \mathbf{Y} = \underbrace{{}^{\mathsf{Y}}}_{\phantom{\mathsf{G}}} \, \mathbf{Y} = \underbrace{{$$





وبالطبع اسهل ان نكتب (١+ي) مباشرة، ولكن القوى الأعلى للعدد ١+ي تحسب بهذه الطريقة.

نعود الآن إلى الحالة حيث 7 – 3ب $< ^\circ$ فنكتب الجذرين 1 ، 1 للمعادلة (۲۸) على النحو:

$$(\mathbf{r}^{\bullet})$$
 $\lambda_{\gamma} = (\mathbf{a}^{-\flat\theta}, \lambda_{\gamma} = (\mathbf{a}^{-\flat\theta}, \lambda_{\gamma} = (\mathbf{a}^{-\flat\theta}, \lambda_{\gamma} = \lambda_{\gamma}))$ حيث

 $\pi > \theta > \cdot$ (\pi \begin{aligned} (\pi \end{aligned} \begin \beq \end{aligned} \begin{aligned} (\pi \end{aligned} \begin

فيكون الحلان المستقلان خطياً:

$$\boldsymbol{\omega}_{0} = (c_{\mathbf{A}}^{-1})^{0} = c^{0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{0}, \quad \boldsymbol{\omega}_{0} = c^{0} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{0} \mathbf{A}^{0}$$

فیکون $\frac{1}{7}$ (سن + صن) حلاً، وکـذلك یکـون (۱/ ۲ي) (سن – صن). وقد رأینا ان هذین الحلین بمکن ان یکتبا سن = 0 جتـا ن 0، صن = 0 حلی التوالی. 0

وواضح انهما مستقلان خطياً لأن احـدهما لـيس مـضاعفاً للآخـر بعـدد ثابت.

طريقة ثانية: نبين ان القيسارية $v_{\rm o}(m^*, m^*)$ ليست صفراً.

$$\theta$$
 جرجا θ جا $($ ا $)$ - جتا $($ ا $)$ × رجا $($ ا $)$ = $-$ رجا





 $^{\prime}$ $^{\prime}$

النظرية (٩):

إذا كان $4^{1}-3$ ب < 0 فالحل العام للمعادلة المتجانسة

$$Y/P - = \alpha$$
 ، $\pi > \theta > \cdot$ ، α/B '= ظا $^{-1}$ $B + ^{\vee} \alpha V = -$

الثال (٢):

$$\frac{\pi \dot{\upsilon}}{\gamma} = \frac{\pi \dot{\upsilon}}{\gamma} + \frac{\pi \dot{\upsilon}}{\gamma} = \frac{\pi \dot{\upsilon}}{\gamma} + \frac{\pi \dot{\upsilon}}{\gamma} = \frac{\pi \dot{\upsilon}}{\gamma}$$

هذه هي المعادلة (الحركة التوافقية المتميزة)، المقابلة للحركة التوافقية البسيطة التي فاذا جعلنا ص. = ٠، ص. = ١٠٠٠ يصير

$$\frac{\pi \dot{\sigma}}{\gamma}$$
 جـ ۱۰۰۰، ویکون الحل الحاص: صن = ۱۰۰۰ جا





الثال (٣):

سابقاً استخرجنا معادلة فرق تبين تأثير الأجيـال الـسابقة في نمـو الـسكان سن٠٢ – رسن = ٠

حيث ر، زيقيسان الأهمية النسبية للجيلين السابقين

فالمعالة المساعدة هي $\lambda^{Y} - (\lambda - i) = \lambda$ ، وجذراها

$$\zeta = \frac{\zeta + \sqrt{\chi^2 + 3\zeta}}{\gamma} = \frac{\zeta}{\gamma} + \frac{\zeta}{\gamma} = \frac{\zeta}{\gamma} + \frac{\zeta}{\gamma} = \frac{\zeta}{\gamma}$$

فاذا كان ر^٢ > - ٤ زكان الجذران حقيقين مختلفين وكان الحل العام:

سن = جد ۸ ۲+ جد ۸ ۲

فاذا کان $|\lambda|$ (۱ ، $|\lambda|$ (۱ کان سن \rightarrow • حینما ن \rightarrow ∞ . اما إذا کان $|\lambda|$ أو $|\lambda|$ أو $|\lambda|$ أكبر من ۱ كان $|\omega_c| \rightarrow \infty$. وإذا كان $|\lambda|$ 1 كان $|\omega_c| \rightarrow \infty$ وإذا كان $|\lambda|$ 1 أكبر من ۱ كان $|\omega_c| \rightarrow \infty$ وإذا كان $|\lambda|$ 1 أكبر من ۱ كان $|\omega_c| \rightarrow \infty$ 1 ألعام.

 $m_{ij} = +_{ij} ((/ Y)^{ij} + +_{ij} ((/ Y)^{i-1})$

وفي هذه الحالة سن \to • إذا كان |c|<7،أما إذا كان $|c|\ge 7$ فالحل يقارب ∞ وفي الحالة الثالثة، $0^{7}<-3$ ز يكون الحل العام:

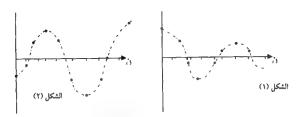
 $(-i)^{1/3}$ (جہ جتان θ + جہ جان θ)،

حيث $\theta = d d^{-1} \sqrt{-\chi^2 - 3 \epsilon / \chi}$. فاذا كنان $- \chi < 1$ فالحل من يقناوب السمفر على نحو متأرجع وهذا ما يسمى بالحركة التوافقية المميزة المكوحة.....(انظر الشكل 1).

واذا كان – ز=١ تنتج الحركة التوافقية التي رأيناها في المثال السابق







ومن الممتع ان نرى انه حتى في هذين النموذجين البسيطين تعتمد طبيعة الحل بشكل حاسم على الأهمية النسبية للسكان في الجبلين السابقين.

التمارين:

في الثمارين من ١ إلى ٤ أوجد الحل العام لكل معادلة فرق. واذا اعطيت شروطاً ابتدائية فأوجد الحل الوحيد الذي يحققها:

ا بحث في خصائص الحل في كل من المعادلتين التاليتين باعتبارها حالة خاصة
 من نموذج نمو السكان في المثال السابق.



$$\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{1 + 0} = m_{0+1} + \frac{1}{\gamma} - m_{0+1} = m_{0+1} + m_{0+1} = m_{0+1}$$

۲. إليك هذا التكامل ك
$$(\theta) = \frac{3}{2} \frac{\pi}{\pi}$$
 حتا $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ دس.

$$\bullet = (\theta)$$
 ۽ ين ان ڪن $(\theta) = \Upsilon$ جتا $(\theta) +$ ڪن $(\theta) = \bullet$

[ارشاد: من الضروري ان نجد أولاً القيمتين الابتدائيتين ك. (٠)، ك.(٠)]

٧. درسنا سابقاً معادلة ركافي اللاخطية، ذات الرتبة الأولى

فبتعويض صن = سن/سن٠٠٠ - بن بين ان هذه المعالدة تصبح:

$$\bullet = 1_{-0,0} - 0_0 - (1_{0} - 0_{0} - 0_{0}) - 0_{0} - 0_{0} - 0_{0} - 0_{0} = 0$$

استخدم نتائج التمرين ٧ في ايجاد الحل العام لمعادلات الفروق في التمارين ٨ إلى ١٢.

$$\Upsilon = 1$$
صن صن- + Υ صن – Υ صن – Λ





استعمل طريقة التمرين (١٤) ونتائج هذا البند لايجباد الحمل العمام لكل معادلة فروق في التمارين التالية:

* المعادلات اللامتجانسة :

تغيير الثوابت

هنالك طريقتان لحل معادلات الفروق اللامتجانسة: المعاملات غير المعنية وتغير الثوابت، وهما يناظران طرق حل المعادلات التفاضيلية اللامتجانسة، وفي هذا البند ندرس طريقة تغير الثوابيت، وهي طريقة بالغة الأثر، واما طريقة المعاملات غير المينة فنناقشها في التمارين، فكما في المعادلات التفاضيلية، تغتران للمعادلة:

حيث سن، صن حلان مستقلان خطياً، للمعادلة المتجانسة. فمن المعادلة (٣٦) ينتج أن:





 $3_{(+1)} = -\infty$ اسن +1 دن +1 فيجمع وطرح جن سن +1 دن صن +1

عندا عندا عندا عندن سندا عندن المناسب ان نعتبر، كأحد شرطين يلزم تحديد هما لا يجاد جن، دن، ان المناسب ان نعتبر، كأحد شرطين يلزم تحديد هما لا يجاد جن، دن، ان المناسب ان نعتبر، كأحد شرطين المناسب ان نعتبر، كأحد شرطين المناسب ان نعتبر، كأحد شرطين المناسب ا

٤٠).... = جوندا سن٠٠٠ + دن١٠ صن٠٠٠

فاذا اعتبرناع وحلا للمعادلة (٣٥) ينتج ان ق =عن٠٠٠ + أ وعن٠١ + ب وع

وما في الحاصرتين، في المعادلة (٤١) قيمته صفر، لأن سن، صن حلان للمعادلة (٣٥). فيقي لدينا الشرط الثاني، الذي يتحقق لكل ن، وهو:

(جننء - جن) سنء + (دنء - دن) صنء = قن.........(٢١) فبضم (٤٢) و(٣٨) نحصل على المنظومة التالية بالمجهولين (جنء - جن) و(درء - دن):





ومحددة هذه المنظومة، أي عن المنطومة وذلك حسب النظرية (٤)، فكه ن:

$$\frac{\tilde{\mathfrak{d}}_{i_1}\omega_{i_2+1}}{\mathfrak{G}_{i_1,i_2}\left(\omega_{i_2}\omega_{i_1}\right)} \rightarrow \epsilon_{i_2+1}-\epsilon_{i_3} = \frac{\tilde{\mathfrak{d}}_{i_1}\omega_{i_2+1}}{\mathfrak{G}_{i_1,i_2}\left(\omega_{i_2}\omega_{i_1}\right)}.....(33)$$

والمعادلتان (٤٤) هما معادلتـا فـرق بـالمجهولين جــن، دن، ويمكـن حلـهما بالمعادلة (٦٦)، فينتج

$$\boldsymbol{\Leftarrow}_{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Leftarrow}_{\boldsymbol{\omega}} - \sum_{b=1}^{C-\ell} \frac{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{b} - \boldsymbol{U}_{b+\ell}}{\tilde{\boldsymbol{U}}_{b+\ell}} \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{b} - \underline{\boldsymbol{\omega}}_{b} \right) \cdot \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta} + \sum_{b=1}^{C-\ell} \frac{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{b} - \boldsymbol{U}_{b+\ell}}{\tilde{\boldsymbol{U}}_{b+\ell}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{b} - \boldsymbol{U}_{b+\ell}}{\boldsymbol{U}_{b} - \boldsymbol{\omega}_{b}} \boldsymbol{\zeta}$$

والحل العام للمعادلة (٣٥) هو:

$$3_{0} = +... \quad m_{0} + c... \quad m_{0} = -... \quad m_{0$$

الثال (١):

جذرا المعادلة المساعدة هما $\lambda = 1$ ، Y، فللمعادلة المتجانسة جذران مستقلان هما $\omega_0 = 1$ ، $\omega_0 = Y^0$ فالقيسارية.

قندا (س،ص)=سندا صند ۲ مسند ۲ مسند ۲ مسند ۲ مسند ۱ مسند ۱ مسند ۱ مسند ۱ مسند ۱ مسند ۱ مسند ۲ مسند ۱ مسند ۱ مسند ۲ مسند ۱ مسند ۲ مسند ۱ مسند ۱





نعوض هذه القيم في حدود المعادلة (٤٥) فنجد مايلي:

$$\sum_{b=1}^{C^*} \underbrace{\check{\mathbf{b}}_b \, \mathbf{o}_{b+1}}_{\mathbf{U}_b + \mathbf{i}} \left(\mathbf{v}_0 \, \mathbf{i}_{\mathbf{o}_{0}} \right) = \underbrace{\check{\mathbf{b}}_{b}}_{\mathbf{b}} \left(\mathbf{i}_{\mathbf{b}} \, \mathbf{o}_{\mathbf{b}} \right) = \underbrace{\check{\mathbf{b}}_{\mathbf{b}}}_{\mathbf{i}} + \underbrace{\mathbf{o}_{\mathbf{b}}}_{\mathbf{b}} - \underbrace{\mathbf{o}_{\mathbf{b}}}_{\mathbf{b}} -$$

$$\sum_{k=1}^{c_{s,k}} \frac{\tilde{\mathfrak{d}}_{b,k}(\omega_{b,k})}{\psi_{b,k}(\omega_{b,k})} = \sum_{k=1}^{c_{s,k}} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \right)^{b+\ell} + \left(\frac{2}{\gamma} \right)^{b+\ell} \right] = \frac{7}{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma} \right)^{c_{s}} - \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{c_{s}-\ell} - \frac{7}{\gamma},$$

$$\frac{-1}{p-1} = \frac{1-0}{p} + \dots + \frac{p}{p} + \frac{p}{$$

فنعوض من هذه القيم في المعادلة (٤٥)، ونجمع الحمدود المتشابهة ونـضم المعاملات الثابتة إلى جـ.، د. فينتج الحل العام للمعادلة (٤٦)، وهو:

المثال (٢):

جذرا المعادلة المساعدة \pm ي. فمن النظرية (٩) يكون حلا المعادلة المتجانسة المستقلان. $m_0 = \pi \text{J}/\pi$ ، $m_0 = \pi \text{J}/\pi$ (انظر المثال (٢) في النبد السابق) والقيسارية:





$$(\xi q)$$
..... $\gamma / \pi i = - \cdots + 0 - \pi + 1 - \cdots = - \pi$

$$\dot{\psi}+\dots+\dot{\chi}=c$$
. $\dot{\psi}=c$

نيكون الحل العام للمعادلة (٤٨) هو عن = جن جتا
$$\frac{\pi \dot{0}}{Y}$$
 دن جان π/Y ،

حيث جن، دن كما ذكرنا. لاحظ ان هذه العبارة تنطوي على جد، د. كثابتين.

العال (٣):

حل
$$صن+ \gamma - (i+1) (i+1)$$
 صن = (i+۳)!....

رأينا في مثال سابق ان المعادلة المتجانسة لها حلان مستقلان هما $w_0 = 0$: $w_0 = (-1)^0$ ن! وبعملية حسابية بسيطة نجد ان القيسارية.

$$v_{0+1}(m) = Y (-1)^{0} (0+1)! (0+Y)!$$
 فحدود المعادلة (٤٥) هي:

$$\sum_{b=1}^{c-1} \frac{\tilde{\mathfrak{d}}_{b,b}(\omega_{b+1})}{\mathfrak{V}_{b+1}(\omega_{1}\omega_{0})} = \frac{-1}{\gamma} \left[\gamma + 3 + \ldots + (\omega + 1) \right] = \frac{\gamma}{\gamma} - \frac{(\omega + 1)}{2}$$

$$\sum_{b=1}^{r-1} \frac{\delta_{b} w_{b,r}}{\delta_{b} w_{b,r}} = \frac{r}{r} \left[\frac{r}{r} + 3 + 0 - r + \dots + (-r)^{6} (i+1) \right]$$

$$\frac{\dot{\upsilon}}{v}$$
 عيث $\left[\frac{\dot{\upsilon}}{v}\right] + 1 + (-1)^{\dot{\upsilon}}$ عيث $\left[\frac{\dot{\upsilon}}{v}\right]$ تعني العدد الصحيح من $\frac{\dot{\upsilon}}{v}$





وعلى الطالب ان يتحقق من هـذه المعادلـة الأخـيرة. فبـضم الثوابـت إلى جـ.، د. وجمع الحدود المتشابهة ينتج ان الحل العام للمعادلة (٥١)، وهو:

$$g_{\delta} = \underbrace{+ \dot{v}! + c. (-1)^{\delta} \dot{v}! \left(\frac{\dot{v}^{2}}{2} + \frac{\dot{\gamma}\dot{v}}{2} + \frac{\dot{r}}{2} \left[\frac{\dot{v}}{2}\right]\right)}_{2}$$

التمارين:

استعمل طريقة تغيير الثوابت في ايجاد حل خاص لمعادلات التمارين ١ إلى ٥

في التمارين التالية سنستنتج حل معادلات الفروق بطريقة المعاملات غير المعينة، وهي اسهل من طريقة تغيير الثوابت، ولكنها تسح فقط عندما يكون $\phi_0 = \phi_1$ ، $\phi_0 = \phi_1$ الثلاثة الثلاثة التالية او اى تجميع لها:

عن = ل. أنّ ل جا جن + ل، جتا جن ل. +ل، ن +.... لك نك

فبعد ایجاد الحلول المستقلة للمعادلة المتجانسة، نبدأ كما يلي: نكتبعن مثل شكل قن ويمعاملات ل, غير محددة.

ii فاذا لم يكن حد من عن في حلول المعادلة المتجانسة، نعوض عن بـدل صن في المعادلة.





صن ۲+ ﴿صن ۱+ب صن = قن(۲٥) ونحل لإيجد المعاملات لور.

- ii) والا فنضرب عن بأصغر قوة صحيحة للعدد ن بحيث لا يكون اي حمد من الناتج حداً في حل المعادلة المتجانسة ثم نكمل كما في (i) (مثلاً: إذا كان حلاً للمعادلة المتجانسة T^0 ، U^0 وكان U^0 وكان U^0 ن U^0 وهذا ليس حلاً للمعادلة المتجانسة،
 - ٦. خذ $a_0 = 0$. $a_0 = 0$ وبين ان المعادلة في التمرين (١) حلها العام

٧. حل معادلة التمرين (٢) بطريقة المعاملات غير المعينة.

٨. حل معادلة التمرين (٤) بطريقة المعاملات غير المعينة.

٩. حل معادلة التمرين (٥) بطريقة المعاملات غير المعينة.

في التمارين التالية أوجد الحل العام لكل معادلة بأي واحدة من الطريقتين، في بعض الحالات قد يفيد استعمال مبدأ التراكم (انظر التمرين ٤-٢-٢).

۱۳. صن+ ۲+ صن = جان





۱۶. ص ن + ۲ - ۲ ص ن + ۲ + ۱ اص ن + ۱ - ۲ ص ن = ۲ ن

 Y/π نات = من Y + Y+من Y - Y+من ۱۵

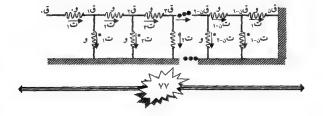
۱۷. صن+۲ - صن+ - صن = ن ۲ + ۱

۱۸. صن ن + + ۲ صن ن + + ۲ صن = ۲ + ۳ + ۴ + ۴ مین

* الشبكات الكهربانية :

في الشبكة الكهربائية التي تشتمل على عدة دوائر كهربائية مغلقة متصلة نستعمل قانون كرتشوف للتيارات لتعيين العلاقة بين الـدوائر المختلفة، وهـو ينص على ما يلى:

التيارات المتجهة نحو أي مفرق في الشبكة مجموعها الجبري صفر وباستعمال هذا القانون وقانون كرتشوف للفولتية، انظر مثلا الشبكة المبينة بالشكل (Υ) حيث تشير قى إلى الفولتية بالنسبة إلى الأرض في النقطة ي، ويشير الجزء المظلل إلى الأرض (حيث الفولتية صفر). ونفترض ان ق. ثابت وان كل المقاومات= و وان قن = • والغرض من الدراسة التالية ان نحصل على معادلة فرق تعطى قه.





فحسب قانون كيرتشوف للتيار نجد أن ت عن + عن الله عن (٥٣)

لكل قيم ك الصحيحة حيث $1 \le b \le 1$ وحسب قانون أوم، نكتب المعادلة (٥٣) على النحو التالي.

$$\frac{\dot{b}_{b-1} - \ddot{b}_{b}}{e} = \frac{\ddot{b}_{b}}{e} + \frac{\ddot{b}_{b} - \ddot{b}_{b+1}}{e}$$
 exact that $+ \ddot{b}_{1} + \ddot{b}_{2} = \frac{\ddot{b}_{b}}{e} + \frac{\ddot{b}_{b} - \ddot{b}_{b+1}}{e}$

والمعادلة المساعدة لهذه جذراها (٣ ± ٥٠)/ ٢، فالحل العام للمعادلة (٥٤) هو:

قه
$$= = -. \left(\frac{7 + \sqrt{6}}{7} \right)^{\frac{1}{2}} + = -. \left(\frac{7 - \sqrt{6}}{7} \right)^{\frac{1}{2}} + = -. \left(\frac{7 - \sqrt{6}}{7} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ولأن ق. ثابت معلوم، قن = ٠، تنتج المعادلتان الآتيتان:

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} \right)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} \right)^{\frac{1}{4}} = 0$$

$$\frac{\ddot{0}}{\dot{0}} = -$$
, $\frac{\ddot{0}}{4} = -$, $\frac{\ddot{0}}{4} = -$

$$(\frac{\gamma+\sqrt{6}}{\gamma})(\frac{\gamma-\sqrt{6}}{\gamma})=1, \text{ inder } 0_{12}=0.$$

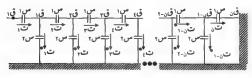
وتنشأ مسألة تماثلة اذا استبدلنا بكل مقاومة في الشكل (٣) مواسعة، كمــا





في الشكل (٤) وجعلنا الخط يمر به تيـار متبـال [أي ان ق. (ن) افـتران دوري]. وهذا النوع من الشبكات يسمى بالعازل الوتري فلتكن المواسعة بين اي موصلين متتالين س،، والمواسعة بالنسبة للأرض س،، فتصير المعادلة (٥٣):

$$w_{1} \frac{c}{c\dot{c}} (\tilde{o}_{b+1} - \tilde{o}_{b}) = w_{1} \frac{c}{c\dot{c}} (\tilde{o}_{b}) + w_{1} \frac{c}{c\dot{c}} (\tilde{o}_{b} - \tilde{o}_{b+1})....(V6)$$



الشكل (٤)

فلتكن أ = س / ٢س١ ولنمضى كما مضينا سابقاً فينتج:

$$\tilde{\mathfrak{o}}_{\underline{b}} = \tilde{\mathfrak{o}}, \ \frac{(l+l+\sqrt{\gamma l+q^{\gamma}})^{\tau_0-b}-(l+l+\sqrt{\gamma l+q^{\gamma}})^b}{(l+l+\sqrt{\gamma l+q^{\gamma}})^{\tau_0-l}} = \tilde{\mathfrak{o}}, \frac{\neq l(\upsilon-b)}{\neq l\upsilon}$$

فتكون الفولتية عند المفرق ك:

$$\bar{\sigma}_{b} = \bar{\sigma}$$
. $\frac{+|(i(-b))|}{-|i|} = b = \frac{+|(i-b)|}{-|i|}$ جتا ون،....(۹٥)

حيث ق. = ل جتا ون. [وقد حصلنا على المعادلة (٥٩) بمكاملة طرفي المعادلة (٥٩) علماً بأن جاارنك المعادلة (٥٨) علماً بأن جاان جان النسبة إلى الزمن ن].



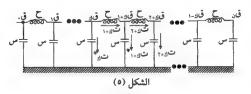


والشبكة المبنية بالشكل (٥) تسمى بالمصفاة الخافضة لأنها تعزل كل موجة فوق حد معين من التردد. ولبيان ذلك نكتب المعادلة (٥٣) بالشكل:

$$\frac{\tilde{o}_{b^{-1}}\tilde{o}_{b+1}}{z} = 5\frac{c^{7}}{c\dot{v}^{7}}\tilde{o}_{b+1} + \frac{\tilde{o}_{b+1}-\tilde{o}_{b+1}}{z}, \quad \text{a.s.} \quad 0 \leq k \leq c-7, \ \text{hy}$$

$$|\tilde{o}_{b+1}-Y\tilde{o}_{b+1}+\tilde{o}_{b}| = 0, \quad \tilde{o}_{b+1}, \dots, (0, 1).$$

نفترض الآن إلى التيار في الحظ متبادل وأن ق_{اد} = ل. جتا ون، حيث و تردد ما محدد.



فنعوض ذلك في المعادلة (٦٠) ونحذف المضاعف المشترك جتا ون، فينتج:

$$\bigcup_{t \in Y} -(Y - \infty^{T}) \bigcup_{t \in Y} + \bigcup_{t$$

حيث $\infty^T = e^T$ س ح> 1.... والمعادلة المساعدة جذراها.

$$(77) \qquad \overline{1-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \sqrt{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} = \frac{1}{\gamma} \frac$$

الحالة (١):

$$(\pi > \mu > 0)$$
 اذا کان $|- \infty > 1 > 1 < 1 < \mu$ نضم جنا $|- \infty > 1 < 1 < \mu$ نضم خنا کان $|- \infty > 1 < 1 < \mu$ نضم خنا المادلة (۲۲)





جنا μ ± ي جا μ = هـ^{±يع}

فالحل العام للمعادلة (٦١) هو

ل و = جـ، جتا ك μ + جـ، جا ك μ ، لكل $\bullet \leq b \leq b$

والآن نريد أن نجد الثابتين جـ.، جـ.. فهناك شرطان اضافيان يتحققـان في شبكة الشكل (٥).

$$\bullet = 0$$
 $\frac{\dot{\delta} - \dot{\delta}_0}{7} + \omega \ddot{\delta}_0 = 0$ $\frac{\dot{\delta}_0 - \dot{\delta}_0}{7} + \omega \ddot{\delta}_0 = 0$

عند المفرقين الأول والأخير. وهاتان المعادلتان تفضيان إلى:

$$(1-\infty^{\gamma})$$
 $U_{i} - U_{i} = + \lambda U_{i-1} - (1-\infty^{\gamma}) U_{i} = + \dots (37)$

نطبق (٦٣) على (٦٤)، فينتج بعد خطوات منظومة متجانسة هي:

$$\bullet = + [\mu (1+i)] - \mu$$
ا جـ. + $[\mu (1+i)] - \mu$ ن اج-

وهنا استعملنا المتطابقات: $\infty^{T} = \Upsilon(1 - \pi \pi)$ ،

$$\mu(1-i)$$
 + $\mu(1+i)$ = μ + μ

 $\mu(1-i)$ + $\mu(1+i)$ = جانب μ ن + ۲

ويكون للمعادلة (٦٥) حل غير عاطل يعطي قيمتين جـ.، جـ، اذا وفقـط اذا كان:

 μ ن + μ (۱+ن) + μ (۲+ن) = =





$$\mu = \mu (1+i)$$
 جا μ اجب μ جان جا μ جان بان جا جان الجا جان الجا جان الجا

والآن: جا $\frac{\mu}{\gamma}$ = • فقط اذا کان μ مـن مـضاعفات π ، وهـذا مستحیل لأن π > σ > •

فیکون جا(ن+۱) = • وهذا یعني أن
$$\mu = \frac{\eta \pi}{1+i}$$
 ، م = ۱، ۲، ۳،....، فیکون س ح و μ = ۲ (۱ - جتا $\frac{\eta \pi}{1+i}$) = μ جا μ جا μ وهذا یعني ان الترددات الطبیعیة لهذه الشبکة هی:

$$eq = \frac{Y}{Ab - 3} \neq \frac{1}{Yb + 1}, q = 1, Y, Y_1, \dots, b$$

فكل تردد أعلى من ون (< ٢/ الرحم) يخفض بمرور الوقت واخيرا، بعمليات حسابية قليلة نيين ان الفولتية:

لكل ك= ١٠ ١، ٣٠، ن ، م= ١، ٢، ٣،ن.

الحالة (٢):

اذا كان $|-\infty|^7/7| \ge 1$ ، فعندها لأن $\infty^7 > 0$ يكون $|-\infty|^7/7 \le 1$ فاذا تساويا تكون $\infty^7 = 3$ ويكون جذرا المعادلة المساعدة كلاهما -1 . وهذا يعني أن لن= $(-1)^{1/2}$ هو الحل العام للمعادلة (11). نطبق هذا الحل على الشروط الحاصرة (13) غصل على المنظومة المتجانسة:

۲جہ - جہ = ۰





٢ج.. + (٢ن + ١) ج.، = ٠ وهذا ليس لها سوى الحل العاطل ج.. = ج.. = ٠
 نتكون ق١ = ٠ لكا, ك. وهذا يخالف الغرض.

وإذا كان $-\infty$ $^{\prime}$ > - > - > - > / $^{\prime}$ وكان هناك μ > • حيث: ∞ $^{\prime}$ = - = $\frac{\kappa^{+} + \kappa^{-\mu}}{v}$ قالمادلة (٦٢) تصيح.

ه ^{±±} والمعادلة (٦١) يكون حلها العام ل == ج. ه ^{قط} + ج. ه ^{-قط} نعـوض هذا في شروط معادلتي (٦٤) فنحصل على المنظومة المتجانسة:

$$c_{-} = \left(\mu^{-} \triangle Y + l + \mu^{-} \triangle\right)_{-} + \left(\mu^{-} \triangle + l + \mu^{-} \triangle Y\right)_{-} + \frac{1}{2}$$

فلكي نحصل على حل غير عاطل ينبغي ان تكون المحددة صفراً، أي أن:

$$\mathbf{A}^{-1/2}\left(\mathbf{Y}\mathbf{A}, \frac{1}{2} + \mathbf{f} + \mathbf{A}^{-1}\right)^{\gamma} - \mathbf{A}^{1/2}\left(\mathbf{A}, \frac{1}{2} + \mathbf{f} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{1}$$

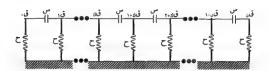
وهذه ليس لها حل إذا كانت $\mu > 0$

فليس هنالك سوى الحل العاطل للثابتين جـ.، جـ، وهذا يخالف الفرض.

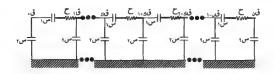


التمارين

- ١. استخرج (٦٩) من المعادلة (٦٨).
- ٢. ناقش الشبكة التي تنشأ من وضع حث ح بدل كل مقاومة في الشكل (٣).
- ٣. ادرس الشبكة المبينة بالشكل (٦)، المسماة بالمصفاة المرافقة بين أنها تستبعد
 كل موجة دون حد تردد معين.
- الشبكة المبينة بالشكل (٧) تسمى مصفاة حاصرة. لأنها تستبعد كل الأمواج غير المحصورة ضمن حدي تردد معينين أوجد هذين الحدين.



الشكل (٦)



الشكل (٧)





تطبيقات على الألعاب

وضبط النوعية

شخصان أ، ب يتباريان في لعبة، لاعلى التعيين، مرات متنالية بالتناوب. ولنفرض أنه في كل مرة يخرج واحد (نستبعد حالات التعادل). فليكن احتمال أن يربح أهو جـ (\pm) واحتمال ان يربح به هو خـ. وبالطبع جـ + خـ = 1. ولنفرض أن المربح والحسارة في كل مرة دينار واحد، وان أ بـدأ ومعه ك ديناراً وان ب بدأ ومعه ق دينار. وليرمز حن إلى احتمال ان يربح أكل ما مع ب عندما يكون مع أ مقدار ن ديناراً. فواضح ان ح. = ، (وهذا هو احتمال أن يربح أكل ما مع ب عندما لا يكون مع أ شيء)، وأن حن، ق = 1 (وذلك عندما يكون أ قـد ربح كل ما مع ب). فلكي نحسب حن عندما تكون ن غير هاتين القيمتين، نهضع معادلة الفرق التالية.

ولفهم هذه المعادلة نذكر انه إذا كان أ معه ن ديناراً في مره ما فاحتمال أن يصير معه ن-١ ديناراً في المرة الثانية هو خ، وبالمثل نفسر الحد الثاني في المعادلة (٧٠).

ولنكتب المعادلة (٧٠) بالصيغة التقليدية.

أي





نستنتج أن جذري المعادلة المساعدة هما
$$\lambda = \frac{-2}{4} = \frac{1}{4}$$
 , $\lambda = 1$

فالحل العام للمعادلة (٧٠) هو اذن: ح
$$=$$
 جـ, $(\stackrel{\leftarrow}{\stackrel{\leftarrow}{=}})$ $+$ جـ, $(\stackrel{}{\stackrel{\leftarrow}{=}})$

عندما جـ = خـ =
$$\frac{1}{7}$$
 (حسب قاعدة الجذر المكرر).

فإذا ذكرنا أن $\leq > 0$ لكل ن، وذكرنا الشرطين الحاضرين ح. = ٠، حين = ١ مجد في النهاية أن

و
$$\frac{\dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}+\dot{\upsilon}}$$
 إذا كان جـ = خـ = $\frac{1}{2}$ (۷۷) لكل ن حيث $\dot{\upsilon} \leq \dot{\upsilon} \leq \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}$

الثال (١):

في لعبة دواليب الخط أخذ لاعب يباري النادي، كل مرة بدينار، يرح مثلـه إذا وقف الحط عند رقعة حمرا، وكان الدولاب يدور حول ١٨ ورقة حمـراء و١٨ سوداء ورقعتين على احداهما صفر وعلى الاخرى صفران. فإذا جرى الدولاب





حراً فان احتمال ان یکون النادي هو السرابح هـو جـ = $\frac{\Upsilon}{\pi N}$ \approx 0.0777 فیکون خـ = 0.0777 ویکون خـ/ جـ = 0.0777 و فإذا بدأ کل من اللاعب والنادي بمبلغ ك دیناراً، فاحتمال افلاس اللاعب =

$$\frac{1}{\sqrt{(-\frac{1}{4})^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{(-\frac{1}{4})^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{(-\frac{1}{4})^{$$

والعمود الثاني من الجدول (١) يبين كيف يتغير احتمال افلاس اللاعب بتغير ك، أي المبلغ الذي يكون معه عند بدء اللعب. لاحظ انه كلما زاد المبلغ الذي يبدآن به يزداد احتمال افلاس اللاعب. وواضح انه كلما استمر اللاعب في اللعب كلما تأكد افلاسه. لذا فإن أبسط اجرار في صالح النادي يضمن في كل حال تقريباً، افلاس اللاعب إذا هو استمر في اللعب.

الجدول (١)

ح ☀ ك	حو	4
۰,٥٢٦٣	٠,٥٢٦٣	١
٠,٨٧٤٠	•, ٦٢٨٧	٥
+,9890	•,٧٤١٥	1.
•, 9977	•, 977•	Yo
.,9990	•, 9989	۰۰
., 9999	., 9999	1

والعمود الثالث في الجدول يبين احتمال خسارة اللاعب إذا لعب بـدينار واحد، ومع النادي كـ ديناراً، فهنا:





فاذا كان مع اللاعب اقل بكثير مما مع النادي زاد احتمال افلاسه، وعلى هذا فإن إجراء يسيراً في صالح النادي، بالإضافة إلى قيود اللعب وزيادة رصيد النادي، تجعل إدارته عمليه وامره الربح.

الثال (٢):

يمكن اتخاذ المثال السابق نموذجاً بسيطاً للصراع على مصادر الغـذاء بـين نوعين من الأحياء في بيئة معزولة.

إفرض أن نوعين من أ، ب انفردا في بيئة فيها ن وحدات من المصادر. كالمراعي أو الأشجار أو سراها. فإذا كان النوع أ يحكم على ك وحدات فإن النوع ب يحكم على ن – ك وحدات ولنفرض أن الصراع يقع على وحدة واحدة في وحدة الزمن ولنفرض أن احتمال فوز أ هو جو ولنجل حن ترمز إلى احتمال خسارة ب كل مصادرة عندما يكون أعنده ن وحدات.

تتعین حن بالمعادلة (۷۰) والشرطین الابتدائین ح. = ۰، حن = ۱. فمن المعادلتین (۷۷) و (۷۷) یکون حل هذه المعادلة.

$$\frac{1}{\tau} \neq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{$$

وكما في المثال السابق فإن اي اجراء في صالح أحد المتناسين يمضمن فناء النوع الاضعف في النهاية. فمثلاً إذا كمان جــ = ٥٥, • وكمان النوع ألديه ن وحدات من مجموع ١٠٠ وحدة، يكون لدينا الجدول التالي:





الجدول (٢)

ح د	ن
+,1414	_ \
٠,٣٣٠٦	۲
٠,٤٥٢٣	۳
+,0019	٤
۰, ۱۳۳۳	٥
٠,٨٦٥٦	1.
1,9988	Yo

لاحظ انه حتى إذا بدأ النوع الذي في صالحه التنافس بمــا لا يزيــد عــن ؟ وحدات من فئة وحدة فإن لديه الاحتمال الأقوى لإزالة منافسة في النهايــة. امــا إذا كان يملك ربع المصادر فإن فوزه في النهاية مؤكد.

وقد اتبع اجراء مماثل لهذا , في إحمدى المؤسسات الصناعية، في الحكم على صلاحية مجموعة من المصنوعات وسنصف هذا الاجراء هذا باختصار أما التفصيل فيحده القارئ في بحث كتبه ج أ برنارد باسم اختبارات في الاحصاء الصناعي ونشره في ملحق ن مجلة الجمعية الملكية للاحصاء (١/ ١٩٤٦).

لفحص صلاحية مجموعة من المصنوعات بدئ بوضع نظام للعلامات فاعطيت في البدء العلامة ن ثم صارت المصنوعات تؤخذ واحدة واحدة ، عفوياً، فإذا وجدت تالفة، يطرح ك، وإذا وجدت صالحة، يضاف ١. ويقف العمل إذا وصل المجموع إلى ٢ ن أو انحط إلى الصفر. فإذا وصل إلى ٢ ن تقبل المجموعة، وإذا انحط إلى الصفر ترفض فلنرفض ان احتمال تناول واحدة صاحلة هي جب وان انحط إلى العلاقة، فبعد





تنادل سلعة أخرى فال العلاقة ستزيد (١) وأحتمال ذلك جـ أو تنقص ك واحتمال ذلك خـ فيكون:

$$- \frac{1}{4} = \frac{$$

ولهذه قيم ن حاصرة هي ح
$$_{1-1}$$
 = = ح. = ۱، ح، ن= ۰....

فإذا كانت ك = 1 تتحول المسألة إلى المسال (١)، ويصبح مؤكداً فيقول المجموعة أو رفضها حسب كون جد اكبر من ألى أو أصغر.



التمارين

- في المثال (١) افرض أن اللاعب (١) بدأ والأمور في صالحه بمقدار ١٠ في المئة اكثر من ب فإذا بدأ ومعه ٣ دنانير فكم يجب أن يكون مع ب حتى تكون لديه فرصة أكبر لكسب كل ما مع أ؟ حتى تكون فرصته ٨ في المئة؟
 - ٢. أجب عن سؤال التمرين (١) على فرض أن الأمور في صالح أ
 - (۱) عقدار ۲٪

(ب) بمقدار ۲۰٪ اکثر من ب.

- ٣. يمكن تعديل الألعاب المبنية بالتمرينين (١) و(٢) وحتى تتسع لأكثر من احتمالين افرض انه في كل مرة يلعب أ يكون جـ احتمال ربحه ديناراً واحداً، جـ احتمال ربحه دينارين، خـ احتمال خسارته حيث جـ + حـ + خـ =١، وليكن حن كما في المثالين. اكتب معادلة فروق تعطي حن على اعتبار ان كـل لاعب يبدأ ومعه ن دينار.
 - 3. حل معادلة التمرين (٣) على فرض أن جـ = حـ $\frac{1}{2}$ وان خـ = $\frac{1}{7}$.
 - ٥. حل معادلة التمرين (٣) على فرض أن جـ = حـ = خـ = $\frac{1}{\pi}$
- ٦. افرض أن جـ احتمال أن يربح أ ديناراً واحداً، حــ أن يخسر ديناراً. خــ أن يخسر دينارين ولتكن حن هي احتمال أن أ سيربح كاما مع ب وذلك عندما يكون معه هو ن ديناراً علما بأن أ، ب بدأ كل منهما ومعه ن ديناراً.





1) ضع معادلة فروق ومعها القيم الحاصرة المناسبة لهذه المسألة.

$$\frac{1}{7}$$
 - خ = $\frac{1}{7}$ ، ح = $\frac{1}{7}$ ، خ = $\frac{1}{7}$ ، خ = $\frac{1}{7}$ ، خ = $\frac{1}{7}$

- ٧. حلل لعبة فيها يكون هنالك احتمال $\frac{1}{r}$ لأن يربح أ دينارين، لأن $\frac{7}{r}$ يخسر ديناراً واحداً.
- أ) افرض ان أ، ب بدأ كل منهما ومعه ن ديناراً. فهل يبدأ أ وهنـاك أي شيء
 في صالحه؟ افرض ان ن = ١٠ فما قيمة ح٠٠؟
- ب) اذا بدأ أ بعشرة دنانير وبدأ ب بعشرين فما الاحتمال في البدء في أن بربح
 أكل ما مع ب؟
- ٨. ناقش كل واحد من التمارين السابقة باعتبارها منافسة بين نوعين على مصادر الغذاء.
- ٩. ضع نموذجاً يناظر ما في المثال (٢) ولكن لثلاثة أنواع تشصارع على مصدر واحد للغذاء.





المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمال

Fundamental Concepts of probability theory



القصل الرابع

الفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمال

في هذا الفصل سوف نقوم بتوضيح بعض المفاهيم الأساسية للنظرية الاحتمالية وذلك من خلال الشرح المبسط لهـذه المفاهيم وإعطائنـا لكـثير مـن الأمثلة التوضيحية والشرح الوافي لها، ومن هذه المفاهيم مفهوم التجربة العشوائية Raudom experiment وكيفية التعبير عن جميع نواتجها كمجموعة من العناصر تسمى بفضاء العينة Sample space حيث تمثل اي مجموعة جزئية من هذا الفضاء بما يسمى بالحادثة العشوائية Random euent. بداية سوف نقوم بإعطاء القارئ فكرة مبسطة عن نظرية المجموعات Set theory والتي تعتمد عليها نظرية الاحتمال في وصف فضاء العينة كذلك سوف نقوم بتوضيح التعريفات المختلفة لفهوم الاحتمال وعلاقته بالتكرار النسبي لحادثة ما Relative Frequency of eveut وشرح كيفية حساب الاحتمال باستخدام القواعد الاساسية لطرف العبد Counting methods وتوضيح مفهبومي التباديل والتوافيق. قمنا بعد ذلك باستخدام مسلمات الاحتمال الأساسية في برهنة بعض القوانين الهامة والمستخدمة في حساب الاحتمال لأي حادثة ما ورأينا أنه من الأهمية إعطاء فكبرة مبسطة على مفهبومي الإحتمال الشرطي واستقلال الحوادث.

تعريف التجربة العشوائية Random experimeds

التجربة العشوائية هي تجربة لها نواتج معلومة مسبقاً لكن لا يمكسن التوقع





فعلى سبيل المثال:

- * عملية إلقاء حجر نرد مرة واحدة.
 - * إلقاء عملة مرة واحدة أو مرتين.
 - * عملية توليد الأجيال في الخلايا.
- * اختيار بطاقة من صندوق به بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠٠.

ونلاحظ أن كل هذه التجارب تشترك فيما بينها في ثلاثة خواص هي:

- ١) لا يمكن التنبؤ في اي من هذه التجارب بالناتج الذي سيظهر مسبقًا.
 - ٢) يمكن معرفة كل النتائج المكنة لكل تجربة.

٣) يوجد احتمالية لكل ناتج من النواتج المختلفة يعتمد على نسبة هـذا
 الناتج في الظهور أو تكراره النسي.

هذه الخواص الثلاث هي الأساس لعمل النموذج الرياضي لكل تجربة من هذه التجارب. وتأتي كلمة (العشوائية) لأنه لا يمكن لنا التنبؤ بأي نتيجة سوف تجدث عند تكرار التجربة.

تعريف: فضاء العينة Sample space:

فضاء العينة التجربة عشوائية هـ و مجموعـة كـل النتـائج الممكنـة للتجربـة العشوائية، ويرمز له عادة بالرمز Ω أو ع.





مثال (١):

تجربة القاء حجر نرد فإن فضاء كل النتاج الممكنة هو ع= {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

مثال (٢):

حيث ص يعني ظهور الصورة على الوجه العلوي للعملة، وك يعني ظهور الكتابة على الوجه العلوي للعملة.

مثال (٣):

إذا كان ع هو مجموعة الأعداد الزوجية من ط، حيث ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية فإن ع معطى بالصورة الآتية ع = {٢، ٤، ٢،}.

مثال (٤):

إذا كان ع هو زمن خدمة عميل ما داخل بنك فــإن فــضاء العينــة في هــذ.ه الحالة هوع = {ز ؛ ز > 6 }

تعريف: الحادث: event

الحادثة هي أي مجموعة جزئية من فضاء العينة ع.

وتنقسم الحوادث إلى:

۱) حادث بسيط أو أولى: elemeutary event

وهي حادثة تحتوي على عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.





مثل الحوادث (1) أو (٢) عند القاء حجر نرد، هي حوادث بسيطة، أو عند إلقاء عملتين (ص ك) أو (ص ص) هي حوادث بسيطة.

Y) حادث مرکب Compound event:

وهي حادثة تحتوي على عنصرين أو أكثر من عناصر فضاء العينة.

كمثال عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن الحادثة {٣،٢،٣} تتكون من ثلاث عناصر وبالتالي فهي حادثة مركبة كذلك عند إلقاء عملة مرتين فإن الحادثة {ص ص، ص ك} هي حادثة مركبة.

* هناك تقسيم آخر للحواث كما يلي:

١) الحوادث المؤكدة Sure events

وهي الحوادث التي تظهر دائماً عند تكرار إجراء التجربة، ويرمز لها بالرمز ع وهي في الغالب تكون فضاء العينة.

Y) الحادث العشوائية Random event:

هو الحادث التي تظهر وقد لا تظهر عند تكرار التجربة، ويرمز لها بالحروف....أ، ب، جـ.

٣) الحادث المستحيل Impossible event or null event?

هو الحادث الذي لا يمكن أن تظهر أبدا مهما تكررت التجربـة ويرمـز لهــا بالرمز ﴾

كمثال ظهور العدد ٧ عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة هي حادثة مستحيلة.





المعاوضة: طالما أن الحادثة عبارة عن مجموعة من العناصر المعروفة
 تعريفاً جيداً فيمكن التعامل معها بقوانين المجموعات التي يمكن تخليصها كالأتي:

۱. الحادث الجزئي subset event

يقال أن أحادث جزئي من ب وتكتب أ رب، ولها مدلول أن ظهور الحادثة أيعني ظهور الحادثة ب لأن كل عناصر من الحادثة أهو عنصر ب لذلك نقول أن ظهور أيؤدي إلى ظهور الحادثة ب لكن العكس ليس صحيح دائماً.



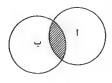
مجموعة جزئية من ب.

۲. تكافؤ أو تساوي حادثتين equal events:

يقال أن الحادثة أ تكافئ أو تساوي الحادثة ب، وتكتب أ = ب إذا كان وفقط إذا كان أ < ب ، ب راً ، أي أن الحادثين يحتويان على نفس العناصر.

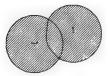
٣. تقاطع حادثين Intersection of two events:

تقاطع الحادثين أ، ب هو أ \cap ب ويعني ظهور كلا من أ، ب معاً. واضح أن حدوث أ \cap ب يعني حدوث أ لأن أ \cap ب \subseteq أ، وبالمثل فإن أ \cap ب كذلك يعنى حدوث ب.

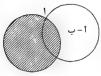




٤. اتحاد حادثن Vnion of two events



ه. الفرق بين حادثتين The defrance between two events:



أ - ب الحادثة تعني ظهور أ مع عدم ظهور
 ب. أو تتكون من جميع عناصر أ عدا التي تنتمي
 إلى ب وبالمثل يمكن تعريف ب - أ على أنه جميع
 العناصر التي تنتمى إلى ب ولا تنتمى إلى أ.

٦. الحادثة الكملة Compuemant event.

الحادثة الممكملة لأي حادثة أهي حادثة تتكون من جميع عناصر المجموعة الشاملة (أي فضاء العينة ع) والتي لا تنتمي إلى أ ويرمز لهــا بــالرمز آ وبطريقــة أخرى فإن آ يعني عدم ظهور الحادثة أ والعكس صحيح.

مثال (٥):

إذا كان ع= {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٢} هو فضاء العينة عند إلقاء حجـر نـرد مرة واحدة وكانت:





٤

أ: حادث ظهور عدد زوجى.

ب: حادث ظهور عدد فردي.

ج: ظهور عدد يقبل القسمة على ٣.

د: ظهور عدد يقبل القسمة على ٤.

أوجد الحوادث الآتية:

الحل:

١) الحدواث المطلوبة هي:

٢) وبإيجاد مكملات هذه الجموعات كالآتي:

$$\overline{ } = \{ 1, 7, 0 \} \quad \overline{ } = \{ 7, 3, 7 \} \quad \overline{ } = \{ 1, 7, 3, 0 \}$$

$$\overline{ } = \{ 1, 7, 7, 0, 7 \}$$

$$\{1, 1, 1, 1, \dots, 1\} = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1,$$





٥) واضح أن ٦ ﴿ ب، ٦ ﴿ جِ وِبِالتَّالَى فَإِنْ جِ لِ بِ

* ملحوظة: في المثال السابق وجدنا أن المجموعتين أ، ب اتحادهم يساوي ع وتقاطع هو \$\phi\$ مثل هذه المجموعات يسمى تجزيء لفضاء العينة ع المحالة على المحالة على عجموعتان أ، ب تكونـا تجـزي، لفـضاء العينـة ع إذا تحقق الآتي:

some prorerties of set بعض خصائص العمليات على المجموعات operations لأى ثلاث مجموعات أ و ب و جـ فإن:

۲) أ∩(ب ∩ جـ)=(أ ∩ ب)∩جـأ ∪(ب∪جـ)=(أ ∪ب)∪جـخاصـة
 الدمج

$$(\cdot \cap \uparrow) \cup (\cdot \cap \uparrow) = (\uparrow \cap \downarrow) \cup (\uparrow \cap \uparrow)$$

وتسمى مخاصيتي التوزيع، سواء توزيع عملية التقاطع على عملية الاتحاد أو العكس.



الفسل الرابع

(أ U ب) – (أ ∩ ب) الفرق المتماثل.

۲) $\overline{(| \cup \psi \rangle} = \overline{| \cap \psi \rangle} = \overline{| (| \cup \psi \rangle)}$ دیمورجان

 $(1 \cup 1) = (1 \cup 1) \cap (1 \cap 1) \cap (1 \cup 1)$

 $!=! \cup !$ $!=! \cap !$ $!=! \otimes \cup !$ $! \otimes !=! \otimes !$

٩)ع 11=1،ع 11=ع

ر و فكره برهان كل هذه الخصائص تعتمد على أن: أ = ب \Rightarrow أ \subseteq ب، ب

* ملحوظة: إذا كان لدينا ن من الجموعات أ،، أبر، أبر، أن فإن:

 $\bigcup_{\nu=1}^{r} f_{\nu} = f_{\Gamma} \cup f_{\Gamma} \cup f_{\Gamma} \cup \dots \cup f_{C^{2}} \quad \bigcap_{\nu=1}^{r} f_{\nu} = f_{\Gamma} \cap f_{\Gamma} \cap f_{\Gamma} \cap \dots \cap f_{C^{2}}$

تعريف: قوة الجموعة The power of set

قوة المجموعة أ هو عدد عناصرها ويرمز له بالرمز ن (أ) أو | أ |.

تعريف: حاصل الضرب الديكارتي Cavtesion Product

إذا كان لدينا مجموعة أ مكونة من م من العناصر هي أ،، أ،، أ، أم، أم، أم وكانت هناك مجموعة آخر ب مكونة من ن من العناصر هي ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، بن فإن حاصل المضرب المديكارتي أ \times ب هو جميع الأزواج المرتبة Ordered Pairs التي على الصورة (أي، أر) يكون عددها هو من أي أن:

 $\{x_i : y_i = (x_i) : y_i =$





مثال (۲):

تعريف: الحوادث المتنافية Mutually exclusive:



الحادثتان أ، ب تكونا متنافیتین (متباعدتین) إذا كان من المستحیل حدوثهما معاً ویكون أ Π ب = ϕ كما هو موضح بالشكل الذي أمامك.

مثال (٧):

إذا كانت أ هي حادثة ظهور عدد زوجي عند إلقاء حجر نود وكانت ب هي حادثة ظهور عدد فردي فإن أ \bigcap ب \Rightarrow ϕ أي أن الحادثين أ و ب متنافيتان وهذا بالطبع واضح لأنه لا يمكن ظهور عدد زوجي وفردي على حجر نود في نفس الوقت.

* أنواع فضاء العينة

يوجد ثلاثة أنواع من فضاء العينة.

۱) فضاء منتهی Finite Space (

هو فضاء يحتوي على عدد محدود من نقاط فضاء العينة ويوجد العديد من الأمثلة على مثل هذا النوع من الفضاءات على سبيل المثال الفضاء الناتج من





عملية إلقاء عملة مرة أو إلقاء عملة مرتين أو إلقاء حجر نرد مرة أو إلقاء حجر نرد مرتين.

Y) فضاء غير منتهي وقابل للعد Countably Infinite space:

هو فضاء يمكن مناظرته بمجموعة الأعداد الطبيعية ن حيث ن = (١، ٢، ٣، ٠٠)

٣) فضاء غير منته وغير قابل للعد Uncountably infinite:

هو فضاء محتوي على عدد لا نهائي من النقاط ولا يمكن إمجاد تناظر بينه وبين مجموعة الأعداد الطبيعية ن وسوف نقـول بـأن ع أو Ω هـو فـضاء متقطع Discrete Sawple space إذا كانت ع أو Ω قابلة للعد وبخلاف ذلك فـإن ع أو Ω فضاء متصل Continuouse Sawple space.

مثال (٨):

بفرض أن فضاء العينة ع يتكون من درجات الحرارة خلال يموم ما في واحد من مدن المملكة ع = {س: س ∈ ح}، حيث ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية واضح أن ع فضاء متصل.

مثال (٩):

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات. أوجـد الحـوادث التاليـة. واحـسب عـدد عناصرها.

أ = {الحصول على صورة في الرمية الثانية}
 ب = {الحصول على كتابة في الرمية الثانية}





جـ = {الحصول على ثلاث صور في الرميات الثلاث}

د = { الحصول على صورة واحدة على الأكثر}

الحل:

حيث ص تعني ظهور الصورة، ك تعـني ظهـور الكتابـة واضـح أن ع هـو مثال لفضاء منقطع وبالتالى فإن:

ا= {ص ص ص، ص ص ك، ك ص ص، ك ص ك}

وعدد عناصرها هو ن (أ) = ٤.

ب= {ك ك ك، ك ك ص، ص ك ك ، ص ك ص ك

وعدد عناصرها هو ن (ب)= ٤.

جـ= {ص ص ص}، وعدد عناصرها هو ن (جـ) =١

د= {ص ك ك، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك } وعدد عناصرها هو ن(د) = ٤

مثال: (۱۰):

إذا كان ع هو فضاء العنية الناتج عن إلقاء حجري نبرد متمينزتين، كل حجر منهم مكون من أربعة أوجه فقط (أي شكل هرمي) مرقمه من 1 إلى ٤ أوجد ع.

أ = ظهور عددين متساويين على حجري نرد.



I limit Itelia

ب= العدد الأول ١ والعدد الثاني زوجي.

ج= مجموع العددين الظاهرين على حجري نرد ٧.

د= الفرق المطلق بين العددين الظاهرين هو ٢.

الحل:

فضاء العينة ع يمكن تمثيل بالشبكة الآتية:

وبالتالي فإن:

$$= \{(\xi,\xi)_i(\Upsilon_i\Upsilon)_i(\Upsilon_i\Upsilon)_i(\Upsilon_i\Upsilon)\} = \emptyset$$

$$\zeta = \{(\Upsilon, \xi), (\xi, \Upsilon), (\Upsilon, \Upsilon), (\Upsilon, \Upsilon)\} = 3$$

واضح آن ج \cap د= \emptyset آي آن ج،د حــادثيتن متنافيتـــان، بالشـــل فـــان ب،د حادثين متنافيتان كذلك أ \cap ب= \emptyset ، أ \cap ج>د كلها حوادث متنافية مثنى مثنى.





تعريف الحوادث المتنافية مثنى مثنى: Muttally exclusice in psirs

يقال للحوادث أ $_1$ ، أ $_2$ ، أ $_3$ ، أ $_4$ ، أنها متنافية مثنى مثنى إذا كان وفقط إذا كان أي 1 2 2 3

*الفهوم الكلاسيكي للإحتمال: Classical Cancept of probability

عند القاء حجر نرد مره واحدة فإن مجموعة النواتج الممكنة هي الأعداد 0.71 وهي أعداد لايمكن لها الظهور في نفس الوقت وبفرض أن الحجر مثالي ومصنوع بطريقة تجعل هذه الارقام لها نفس فرص الظهور، فإن $\frac{1}{1}$ هو مقياس لظهور أي عدد من هذه الأعداد وبالتالي إذا كان لدينا ن من النواتج لها نفس فرص الظهور وكانت الحادثة أ مجموعة جزئية من هذه النواتج وعدد عناصرها هو م فإن النسبة م/ ن هي مقياس لاحتمال ظهور الحادثة أ.

تعريف لابلاس للإحتمال: Laplace's classical definition of mathematical prabability

الأحتمال ح (1) لأي حادثة عشوائية أهو ح(1)= $\frac{2}{0}$ حيث م هو عدد مرات حدوث الحادثة أون هو عدد جميع نواتج التجربة (فضاء العينة). وبالتبالي فإنه إذا كانت أهي حادثة الحصول على العدد ٢ فإن احتمال حدوثها هو $\frac{1}{7}$ واحتمال الحصول على عدد فردي $\frac{7}{7}$ أي $\frac{1}{7}$.

مثال (۱۱):

إذا كانت ع هو فضاء العينة الناتج من إلقاء عملية مرتين وكانت أ همي





حادثة ظهور صورتين ب ظهور صورة واحدة. أوجد ح (أ) و ح (ب).

الحل:

كما سبق فإن فحضاء العينة في همذه الحالة هـ و ع= $\{$ ص ك ، ك ص ص، ك ك $\}$ وبالتـــالي فـــإن $\}$ = $\{$ ص ص $\}$ وب= $\{$ ص ك ، ك ص $\}$ اي أن ح (أ) = $\frac{7}{2}$ و كذلك ح (ب) = $\frac{7}{2}$ = 0, ه

مثال(١٢): إذا كان ع هو فضاء العينة الناتج من إلقاء حجري نرد متميزين مرة واحد وكان كل حجم عبارة عن مكعب كتب على أوجه الستة أرقام من اإلى ٦، فإذا كانت أحادثة الحصول على مجموع الرقمين الظاهرين ٧ أوجد ح(أ).

الحل:

سبق وأن تم إيجاد فضاء العينة الناتج عند إلقاء حجري نود متميزتين ويتكون من أربعة أو جهة وبالمثل فإن عدد الفضاء في هذا المثال يتكون من (T_1, T_2) ويتكون م رتب وبالتالي فإن عناصر الحادثة أ هي $\{(1, T_1), (Y_1, 0), (T_1, Y_2), (Y_2, Y_3), (Y_2, Y_3), (Y_3, Y_4), (Y_4, Y_5), (Y_5, Y_6), (Y_6, Y$

ونلاحظ أن تعريف لابلاس يعتمد على فكرة أن جميع النـواتج لهـا نفـس فرص الظهور وهذا يعني أنه يمكن تطبيقه فقط على التجارب التي لها عدد محدود من العناصر المتساوية في عدد مرات الظهور وبالتالي لا يمكن تطبق هذا التعريف على عدد كبير من المسائل. كمثال إذا أردنا إيجاد احتمال شخص مصاب بمرض





ما أو احتمال سحب لمبة معيبة من إنتاج مصنع ما. وبالتالي فـنحن بحاجـة إلى تعريف أكثر شمولاً من تعريف لابلاس.

The Frequency theory of probability: نظرية التكرار الاحتمال

توجد طريقة أخرى لتعريف الاحتمال وذلك باستخدام مفهوم التكرار النسبي والذي سبق وأن تم شرحه سابقاً. فإذا كان لدينا تجربة ما عشوائية تتكون من المخرجات m_1 , m_2 , m_3 , m_4 , m_5 , m_6 , m_7 , m_7 , m_8 , m_8 , m_9 ,

$$\dot{\upsilon}(\dots, \Upsilon, \Upsilon, \Upsilon, \Upsilon) = \underbrace{\dot{\upsilon}}_{\dot{\upsilon}} \underbrace{\dot{\upsilon}}_{\dot{\upsilon}} \underbrace{\dot{\upsilon}}_{\dot{\upsilon}} + \underbrace{\dot{\upsilon}}_{\dot{\upsilon}} + \underbrace{\dot{\upsilon}}_{\dot{\upsilon}}$$

كمثال إذا قمنا بإجراء تجربة ما مثل إلقاء عمله معدنية لها وجهان وهذان الوجهان لهما نفس فرص الظهور. وبإيجاد التكرار النسبي لظهور الكتابة على العملة فسوف نلاحظ أن قيمة التكرار النسبي لظهور الكتابة يـؤول إلى مقدار ثابت يقرب من للم كلما زاد عدد الرميات إلى مالانهاية.

Ayioms of Mathematical Probability مسلمات الاحتمال

بفرض أن أحادثة ما من فضاء العينة ع فإنه يوجـد عـدد مـا ح(أ) يحقـق الآتى:





- ١) لأي حادثة أ من فضاء العينة ع فإن $\cdot \leq -(1)$.
 - إذا كانت ع فضاء العينة فإن ح(ع) = 1.
- ٣) إذا كانت أ، ب حادثتين متنافيتان من فضاء العينة ع فإن ح(الب) = ح(ا)
 + ح(ب) ويمكن تعميم المسلمة الثالثة في حالة ما إذا كان عدد ن من الحوادث المتنافية مثنى مئنى كالآتي:

حيث أر، أر، أم، أم، المنه مي حوادث جزئية من فضاء العينة ع ومتنافية مثنى مثنى .

* ملحوظة: يمكن برهنة المعادلة الأخيرة اعتماداً على مسلمة ٣ وخطوات الاستنتاج الرياضي.

مثال (۱۳):

القي حجر نرد مكون من أربع أوجه مرقمة ١، ٢، ٣، ٤ وكانـت أ حادثـة ظهور عدد فردي ب حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على ٣. فأوجد ح (ب).

الحل:

فضاء العينة في هذه الحالة هوع = {١، ٢، ٣، ٤} وبالتالي فإن:

$$\{\Upsilon\} = \{\Upsilon, \Upsilon\}$$
 ، ب $\{\Upsilon, \Upsilon\} = \{\Upsilon\}$.

$$\dot{\mathcal{L}}(1) = \frac{\dot{\mathcal{L}}(1)}{\dot{\mathcal{L}}(2)} = \frac{\dot{\mathcal{L}}(1)}{\dot$$





$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{(-1)}{(\varepsilon)} = (-1)$$

واضح أن فرصة ظهور أ أكبر من فرصة ظهور ب وذلك لأن ب ⊂ أ.

مثال (١٤):

أحد الفرق الدراسية تتكون من ١٠٠ طالب كانت نشائجهم في الاختبار كما يلي: ٧٨ رسبوا في الاقتصاد، ٣٤ رسبوا في الإحصاء، ١٢ رسبوا في كلا المادتين تم إختيار طالب عشوائياً من هذه الفرق أوجد الاحتمال:

- ١) أن يكون الطالب رسب في الاقتصاد.
- ٢) أن يكون الطالب رسب في الإحصاء.
- ٣) أن يكون الطالب رسب في المادتين معاً.

الحل:



مثال (۱۵):

ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات فإذا كانت أ همي حادثة ظهـور صـورتين على الأقل فأوجد ح (أ).

: 12



وبالتالي فإن عدد عناصره هو ٢٦ أي ٨ ويمكن سردهم بالصورة الآتية:-

ع = {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ص ك ك، ك ص ص، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك }

الحادثة أهي: أ = {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص} مثال (١٦):

إذا اعتبرنا أن ع هو فضاء العينة الناتج عـن إلقـاء حجـر النـرد فـإن: ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ليكن:

$$= {dag(عدد فردي} ، ب = {dag(عدد زوجي})$$

ج = {ظهور عدد يقبل القسمة على ٣}





١) هل أ، ب حادثتنان متنافيتان.

٢) هل ب، جه متنافيتان.

الحل:

واضح إن: أ =
$$\{1, 7, 0\}$$
 ، ب = $\{7, 3, 7\}$ ، ج = $\{7, 7, 7\}$ الله واضح إن: أ = $\{7, 7, 7\}$ ب الله ج = $\{7, 7, 7\}$

واضح أن الحادثتين أ، ب متنافيتان بينما أ، جد غير متنافيتان، ب، ج، غير متنافيتان والآن نعطي النتائج الهامة والتي يمكن برهنتها بإستخدام مسلمات الإحتمال الثلاث.

نظریة (۱): برهن أن لأي حادثتين أ، ب فإن: ح($\bigcap \overline{\bigcap}$) = ح(أ) = ح(أ \bigcap ب) أو بطريقة أخرى فإن:

البرهان: إنظر الملحق بآخر هذا الفصل.

نظرية (٢): إذا كانت أ و ب أي حادثتنان من فضاء العينة ع فإن:

ح (ال
$$\psi$$
) = ح(ا) + ح(ψ) – ح (ال ψ)

البرهان: إنظر الملحق بآخر هذا الفصل.

* ملحوظة: يمكن كتابة الصورة السابقة أيضاً كالآتي:





نتيجة

- ١) إحتمال الحادثة المستحيلة هو الصفر ح(﴿ ﴾) = ٠
 - $\Upsilon = (1) + (\overline{1}) + (\overline{1}) + \gamma$) لأي حادثة أ فإن ح
 - (ب) إذا كانت أ \subset ب فإن ح(أ) \leq ح(ب)
 - ٤) لأي ثلاث حوادث أ، ب، جـ فإن:

$$-$$
 (اال ب \cup جران + ح(ب) + ح(ب) + ح(ان ب $-$ حران ب $-$ حران ب $-$ حران ب $-$ جران ب $-$ (ال جران ب $-$ ب حران ب $-$ ب

البرهان: أنظر الملحق بآخر هذا الفصل.

مثال (۱۷):

في عمليةي حصر لـ ٢٠٠ طالب من طلاب جامعة الملك سعود وجد أن ٥٠ يقرؤون جريدة ب (الحياة)، ١٢٥ يقرؤون جريدة ب (الحياة)، ١٢٥ يقرؤون جريدة جد (عكاظ)، ٢٠ يقرؤون جريدتي الشرق الأوسط والحياة، ٢٥ يقرؤون جريدتي الشرق الأوسط وعكاظ وعكاظ ويفرض أن جميع الطلاب يقرؤون أي من الجرائد الثلاث. اختير طالب عشوائياً فأوجد الاحتمالات الآنة:

- ١) أن يكون الطالب من قراء الجرائد الثلاث معاً.
- ٢) أن يكون الطالب من قراء جريدة الشرق الأوسط فقط.





الحل:

ليكن أ = {أن يكون الشخص المختار من قراء جريدة الشرق الأوسط}.

ب = {أن يكون الشخص المختار من قراء جريدة الحياة}

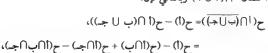
جـ = {أن يكون الشخص المختار من قراء جريدة عكاظ}

وبالتالي فإن:

ويكون المطلوب أولاً هو إيجاد احتمال أن يكون الشخص المختار من قراء الجرائد الثلاث معاً، أي احتمال أ∩ب∩جـ

$$\frac{1}{Y} = \frac{Y \circ}{Y \cdot \cdot \cdot} + \frac{Y \circ}{Y \cdot \cdot \cdot} + \frac{1 \circ \circ}{Y \cdot \cdot \cdot} - \frac{\Lambda \circ}{Y \cdot \cdot \cdot} - \frac{1}{Y \cdot \cdot} - \frac{1}{Y \cdot \cdot} - \frac{1}{Y \cdot \cdot \cdot}$$

ثانياً لأيجاد احتمال أن يكـون الطالـب من قراء جريدة الـشرق الأوسـط فقـط يلـزم إيجاد احتمال أ∩(ب∪ج) وبالتالي فإن:





$$\frac{r_{\cdot}}{r_{\cdot}} = \frac{1}{r_{\cdot}} + \frac{r_{0}}{r_{\cdot}} - \frac{r_{\cdot}}{r_{\cdot}} - \frac{r_{0}}{r_{\cdot}} = \frac{r_{0}}{r_{\cdot}}$$

* أمثلة محلولة:

في هذا الجزء سوف نتناول بالشرح بعض الأمثلة التوضيحية الـتي تغطي كل ما تم دراسته في هذا الفصل.

مثال (۱۸):

تم اختبار جهاز كهربائي وذلك بتسجيل وقت خدمته ز بالساعة وبفـرض أن فضاء العينة في هذه الحالة هو جميع قيم ز الحقيقية الغير سالبة فإن:

$$\{i \leq j \leq j \leq i \}$$

أوجد:

١. الحادثة أ أن يعمل الجهاز لمدة تقل عن مائة ساعة.

٢. الحادثة ب أن يعمل الجهاز لمدة تقل عن مائة وخمسون ساعة.

٣. الحادثة جـ أن يعمل الجهاز لمدة تتراوح بين ٥٠ ساعة إلى ١٥٠ ساعة.

ئم أوجد الحوادث الآتية:

الاب، بلاج الب بالب

: الحل

واضح أن الفضاء المعطي في هـ أه الحالـة هـ و فـضاء متـصل والحـوادث المطلوبة هي:





مثال (۱۹):

صندوق يحتوي على ٥٠ تفاحة، و١٥٠ برتقالة فبإذا كمان نصف التفاح ونصف البرتقال عطب (معيب) فإذا تم أخذ واحدة من هذا الصندوق عشوائياً.

١. احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة معيبة.

٧. احتمال أن تكون الوحدة المحسوبة معيبة أو تفاحة.

الحل:

واضح أن:

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_{11}} = (\dot{\gamma} \cap \dot{\gamma}) + (\dot{\gamma}_{11} = \dot{\gamma}_{11} = \dot{\gamma}_{$$



وبالتالي فإن

$$=\frac{70}{7..}-\frac{0.}{7..}+\frac{1..}{7..}=(...)$$

مثال (۲۰):

بفرض أن أ وب وجـ ثلاث حوادث تكون تجزئ لفضاء ما ع بحيث ح(1) = ح(ب)، ح(1) = ۲ ح(جـ) أوجد ح(1)، ح(ب)، ح(جـ). الحل:

بما أن أ، ب، جـ تكون تجزئ لفضاء العينة ع فهـي حــوادث متنافيــة مثنــى مثنى وإتحادها يساوي فضاء العينة وبالتالي:

$$\frac{1}{0} = (-1) + (-1) + (-1) = (-1)$$

$$(-1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال (۲۱):

بفرض أن أ، ب، جـ ثلاث حوادث من فضاء ما ع بحيث ح(أ) = ح(ب) = ح(جـ) = 0, ٢٥ .



وكان ح(أ \cap ب) = ح(جد \cap ب) = ۰، ح(أ \cap ج)= ۱۲، ۱۲ه أوجد الآتي:

الحل:

٢. والآن توجد ح(أ∪ب)

3. باستخدام قانون ديمورجان لدينا ح
$$(\overline{||} \cup \overline{||}) = \neg((\overline{||} \cap \overline{||}))$$

٥. أيضاً باستخدام قانون ديمورجان لدينا ح
$$(\overline{|\cdot|})$$
 = ح $((\overline{|\cdot|}))$

7. لإيجاد ح (أ
$$| \widetilde{\Pi} \widetilde{\Psi} \rangle$$
 فإن ح (أ $| \widetilde{\Pi} \widetilde{\Psi} \rangle) = - (| \widetilde{\Pi} \widetilde{\Psi} \rangle)$



- ۱ -ح(ب ل جـ)= ۱ -(۲۵+۰,۲۵+۰) = ۰,۰

مثال(۲۲):

عدد صحيح تم اختياره من بين أول ٢٠٠ عدد صحيح موجب فما هـ و إحتمال أن يكون العدد المختار عشوائياً يقبل القسمة على ٦ أو ٨.

: 141

بفرض أن أ= {حادثة أن العدد المختار يقبل القسمة على
$$\Gamma$$
}

 $\mathbf{v} = \{\text{حادثة أن العدد المختار يقبل القسمة على $\Lambda}\}$

نعلم أن فضاء العينة هو: $\mathbf{v} = \{1, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}\}\}$

وبالتالي: أ= $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v},$$





$$\frac{\Lambda}{2 \cdot 1} = \frac{(+ \bigcap_{i})_{i}}{(i)} = (- \bigcap_{i} \bigcap_{j})_{i}$$

ويكون المطلوب هو إيجاد قيمة أ \cup ب أي ح (أ \cup ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ \cap ب)

$$\frac{\circ}{\mathsf{Y}_{11}} = \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{Y}_{11}} - \frac{\mathsf{Y}_{0}}{\mathsf{Y}_{11}} + \frac{\mathsf{Y}_{0}}{\mathsf{Y}_{11}} =$$

مثال (۲۳):

صندوق يحتوي على ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٣٠ أخذت بطاقة عشوائياً فما احتمال أن يكون عليها رقم فردي أو مربع لأي عدد صحيح.

الحل:

وبفرض أن أهي حادثة ان يكون الرقم الذي على البطاقة هو رقم فردي وأن ب هي حادثة أن الرقم همو عمدد مربع لأي عمدد صحيح من ١ إلى ٣٠ وبالتالى فإن:

وبالتالي



$$\frac{r}{r.} = (\neg \cap 1) - \frac{\circ}{r.} = \frac{(\neg) \circ}{(e) \circ} = (\neg) - \frac{1 \circ}{r.} = \frac{(1) \circ}{(e) \circ} = (1) - \frac{1}{r.} = \frac{(1) \circ}{(e) \circ} = (1) - \frac{1}{r.} = \frac{r}{r.} - \frac{\circ}{r.} + \frac{1}{r.} = \frac{$$

مثال(۲٤):

قذفت ثلاث قطع معدنية من النقود مرة واحـدة (أو قطعـة تقـذف ثـلاث مرات) وعرفنا الحوادث الآتية:

أ: حادثة ظهور صورة في الرمية الثانية، ب: حادثة ظهور صورة على الأقل.

جـ: حادثة ظهور صورتين على الأقل، د: حادثة ظهور كتابة من الومية الأولى.

أوجد الإحتمالات الآتية:

الحل:

١) نريد إيجاد قيمة ح(أ∪د) وبإيجاد الحواث أ، ب، ج، د فإن:

أ= {ص ص ص، ص ص ك، ك ص ص، ك ص ك}

ب= {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ص ك ك، ك ص ص، ك ص ك ، ك ك ص}



ج= {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص}

د = {ك ص ص، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك}

$$\frac{1}{\lambda} = (\lambda) = \lambda \quad \frac{1}{\lambda} = \lambda \quad \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{7}{3} = (1 \cap 1) \Rightarrow \Rightarrow (1 \cap 1) = \frac{7}{3}$$

٢) لحساب ح (ألاب) فإن:

$$\frac{\epsilon}{\Lambda} = (1) = -(1) = -(1)$$

$$-(1)$$
 = ح(1) + ح(ب) – ح(1)

$$\frac{\vee}{\wedge} = (\psi) = \frac{\vee}{\wedge}$$

ويترك الباقى كتمرين للطالب.

مثال (۲۵):

إحتمال أن يكون الجو عاصف في يــوم مــا هــو ٦ , • واحتمـــال أن يكــون ممطر هو ٥ , • واحتمال أن يكون عاصف وبمطر هو ٣ , • ما هو احتمال

- ١) أن يكون الجو عاصف أو ممطر أو كليهما.
 - ٢) أن يكون الجو عاصف فقط.

الحل:

بفرض أن أ= حادث أن يكون الجو عاصف.





ب = حادث ان يكون الجو ممطر.

وبالتالي:

$$\bullet$$
 , $\Psi = (\neg \cap \uparrow)$, $\Phi = (\neg \cap \uparrow)$, $\Phi = (\neg \cap \uparrow)$

١) ألاب هي حادثة أن يكون الجو عاصف أو عمطر أو كليهما وبالتالي:

$$-(1 \cup 1) = -(1) + -(1) - -(1 \cup 1)$$

۲) اَ \square هـي حادثـة أن يكـون الجـو عاصـف نقـط ح \square \square = ح(ا) \square = ح(ا) \square – ح(ا \square \square)

القواعد الأساسية لطرق العد والتبادل

The principle conmting and Permutations

أولاً: أساسيات طرق العد

في معظم مسائل الإحتمال نحتاج دائماً لمعرفة عدد عناصر المجموعة المطلوب حساب الإحتمال لها وهذه العملية تكون في غاية الصعوبة خاصة إذا كان عدد العناصر المختار أكثر من عنصر. لذا يجب التعرف على الطرق الجيدة لحملية العد.

مثال (٢٦):

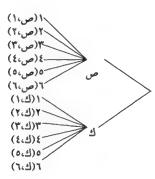
بفرض أن لدينا تجربة مكونة من مرحلتين المرحلة الأولى هي عملية إلقاء





عملية مرة واحدة والمرحلة التالية هي عملية إلقاء حجر نرد عليه الأرقــام مــن ١ إلى ٦ فما هي النتائج المكنة.

: الحل:



فيكون عدد كل التتائج الممكنة هو ١٢ هو ناتج من عملية المضرب عدد نواتج المرحلة الأولى × عدد نواتج المرحلة الثانية أي ٢ × ٢

مثال (۲۷):

بفرض أن عملية إلقاء عملة ثم تكرارها إلى مرتين ثم إلقي حجر نرد سرة واحدة مما هو عدد النتائج الممكنة.

: 141

في المرحلة الأولى والثانية تتم عملية إلقاء عملة مرتين ويكون عدد النتـائج الممكنة هو Y × Y أما في المرحلة الثالثة فيتم إلقاء حجر نرد وعــدد كــل النــواتـج





له المرحلة هو ٦ وبالتالي فإن عدد جميع التناتج في المراحل الثلاث هـو $\times \times \times$

* قاعدة العد الأساسية The principle Counting rule

مثال (۲۸):

إلقاء حجر نرد أربع مرات ما هو عدد النواتج الممكنة.

الحل:

عدد النتائج (الطرق) الممكنة هو ٦ × ٦× ٦× ٦

مثال (۲۹):

امتحان شهري يتكون من ثلاثة أسئلة إختبار من متعدد كل سؤال له أربع خيارات فما هو عدد الإجابات الممكنة لهذا الإختبار.

الحل:

لدينا ثلاثة أسئلة إختيار من متعدد كل سؤال هو مرحلة وكل سؤال يمكسن أن يجاب بأربع طرق وبالتالي فإن كل مرحلة مكونة من أربع نتائج ٤× ٤× ٤ = ١٤ هي كل النتائج المكنة لهذا الاختبار.





:Permutations

مثال (۳۰):

إذا كان لدينا خمسة حروف أ، ب، ج. د، هـ فكم عدد الكلمـــات الممكنــة المكونة من ثلاثة حروف بشرط عدم تكرار أية حروف.

الحل:

بفرض أن لدينا ثلاثة أماكن هي الحروف المطلوب وضعها فيها المكان الأول يمكن أن يملئ بالحروف الخمسة أما المكان الثاني فيمكن أن يملئ باربعة حروف. المكان الثالث يمكن أن يملئ بثلاثة حروف فقط وبالتالي باستخدام القاعدة الأساسية للعد. فإن عدد الطرق الممكنة لتكوين كلمة مكونة من ثلاثة حوف هو:

$$0 \times 3 \times 7 = 7$$
 طریقة.

في هذا المثال قمنا باختيار ثلاثة حروف نختلفة من خمسة حروف ووضعهم بترتيب معين وتسمى هذه العملية بالتبديل (Permutation).

تعريف التبديل (Parmutation):

أي ترتيب أو سحب لـ ر من الأشياء مأخوذة بدون تكرار ومختارة مـن ن من الاشياء المختلفة يسمى بتبديل ن مـن الأشـياء مـأخوذة منهـا ر مـرة واحـدة وعدد مثل هذه التبديلات يرمز له بالرمز نمر وهو يساوي:





مثال (۳۱):

في المثال السابق كان لدينا ن = ٥ ومأخوذ منها ر = ٣ وبالتالي فـإن عـدد التبديلات الممكنة.

ويمكن كتابه عدد تبادل ن من الأشياء مأخوذ منها ر من الاشياء مرة واحدة دون تكرار كالآتي:

$$\dot{v}_{0} = \frac{\dot{v}_{0}}{(\dot{v}_{0}-\dot{v}_{0})!}$$
 حیث $\dot{v}_{0} = \dot{v}_{0}$ درن (۲-۱) درن المحمد موجب. (Factorial) ناحیث ناعد صحیح موجب.

مثال (۳۲):

اوجد عدد التباديل لـ ٨ حروف مأخوذ منها ٣ حروف مرة واحدة (ما هو عدد الكلمات المكونة من ٣ حروف دون تكرار الحروف).

الحل:

عدد الكلمات المكونة من ٣ أحرف مأخوذة من ٨ أحرف دون تكرار هو:

$$\Lambda_{q,q} = \frac{1 \cdot 1}{(1 - 1)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{0!}$$

مثال (۳۳):

كم زوج من الحروف يمكن أخذه من الحـروب {أ، ب، جــ} دون تكـرار أي منها.





:, 12-1

عدد تبادیل ۳ حروف مأخوذ منها حرفان مرة واحدة هو $\P_{q\gamma} = \frac{\P_{q\gamma}}{(\gamma-\gamma)!} = \gamma$

وهذه الكلمات هي أب، أج، ب أ، ب ج، جد أ، جر ب.

ملحوظة: إذا كانت ر = ن فإن نمن = ن! وبالتالي فإن عدد الطرق
 المختلفة لترتيب ن من العناصر المختلفة في صف هو ن!.

مثال (۲٤):

في المثال السابق إذا أردنا تكوين كلمات مكونة من ثلاث حروف فإن عدد هذه الكلمات هو ست كلمات حيث:

وهي:

جب أ، ب ج أ، ب ا ج ا ج ب، ا ب ج، ج ا ب

تعريف التوافيق Combinatorics:

عند اختيار ر من الاشياء من ن من الأشياء دون النظر عمن ترتيب همذه العناصر وبدون تكرار هذه العناصر يسمى توافيق ن من الأشياء مأخوذ منها مرة أخرى ويرمز له بالرمز.

Binomial والتعبير $\binom{0}{1}$ يسمى معامل ذات الحدين (را(i-1)) والتعبير (Coefficient وذلك نسبة لنظرية ذات الحدين الشهيرة.





مثال (۳۵):

أوجد عدد الطرق لمسحب رقمين من المجموعة أ= {١، ٢، ٣، ٤، ٥} دون النظر إلى الترتيب هذه المجموعة.

الحل:

عدد الطرق المطلوب لسحب رقمين من هذه المجموعة

ا طرق
$$1 = \frac{\epsilon \times 0}{1 \times \gamma} = \frac{|0\rangle}{|(\gamma - 0)|\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

مثال (٣٦):

أوجد كل التوافيق والتباديل للحروف أ، ب، ج، د عند اختيار ثلاثة منها مرة واحد.

الحل:

أولاً التباديل: عدد التباديل لأربع حروف ماخوذ منهـا ثلاثـة مـرة واحـد هو:

$$3\gamma_{\gamma} = \frac{3!}{(3-\gamma)!} = 3\gamma$$

وهي كالآتي:

Sand S



وهي ٢٤ تبديل ويحذف العناصر التي تتكون مـن نفـس الحـروف لكنهــا مختلفة في ترتيبها فيتبقى أربع عناصر فقط هي كالآتي:

اب ج، اب د، اجد، ب جد

هي كل التوافيق الممكنة وبالتالي فإن عدد التوافيق يساوي عدد التباديل مقسوماً على مضروب ر $\binom{3}{r} = \frac{3!}{7!(3-7)!} = \frac{3!}{7.7} = 3$ وبالتالي فإن عدد التوافيق يساوي عدد التباديل مقسوم على مضروب ر.

مثال (۳۷):

إذا كان لدينا ١٠ أفراد ويراد تكوين لجنة منهم مكونة من ثلاثة أفراد فمـــا هو عدد الطرق الممكنة لتكوين تلك اللجنة.

:, 121

حيث أن ترتيب الأفراد هنا لا يهم وبالتائي فإننا نريد حساب توافيــق ١٠ أفراد منهم ٣ أفراد مرة واحدة.

$$IA \cdot = \frac{1^{\circ}A^{\circ}A}{V^{\circ}A^{\circ}I^{\circ}} = \frac{V^{\circ}A}{U^{\circ}} = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$$

مثال (٣٨):

إذا كان لدينا ٢٠ رجل و ١٠ سيدات ويراد تشكيل لجنة مكونة من خمسة أفراد ثلاثة من الرجال وإثنان من المسيدات فكم عمدد الطرق لتكوين تلك اللجنة.





: 141

تكوين اللجنة يمكن تقسيمها إلى مرحلتين:

المرحلة الأولى هي عملية اختيار الرجال أما المرحلة الثانية فهي عملية اختيار السيدات ويكون طريق $\binom{\Upsilon}{r} = \binom{\Upsilon}{r} = 111 = 211 = 211$ اختيار السيدات ويكون طريق $\binom{\Upsilon}{r} = \binom{\Upsilon}{r} = \frac{115 - 115}{115}$

طريقة
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 = 3$$
 عدد الطرق لإختيار سيدتين.

وبالتالي فإن عدد الطرق المطلوب هو حاصل ضرب عدد الطـرق في كلتــا المرحليةن.

وبالتالي فإن تشكيل اللجنة المكونة من ٣ رجال، ٢ سيدة يلـزم ١٣٠٠٥ طريقة.

* العلاقة بين التبادل والتوافيق:

ما سبق يمكن القول بأن الفارق بين النباديل والتوافيق هو كلمة دون النظر للترتيب فالترتيب يزيد من الطرق ومن عدد الأشياء المكونة كمثال عدد الكلمات المكونة من حروف معينة أما عدم النظر إلى الترتيب يقلل من عدد هذه الكلمات وتكون العلاقة بين التبادل والتوافق كما قلنا سابقاً هي:

$$\begin{pmatrix} \dot{c} \\ c \end{pmatrix} = \frac{\dot{c} a_c}{c!}$$





أي أن: عدد الطرق الناتج من الترتيب (التباديل).

ر! × عدد الطرق الناتج دون النظر إلى الترتيب (توافيق).

مثال (۳۹):

في نظام تليفوني معمول به بأحد كليات جامعة الملك سعود كان يجب أن تكون أرقام كل تليفوناته لها الشكل أ γ حيث الرموز أ، γ جد تأخذ القيم من • إلى 9 بحيث يكون أ γ ب γ جد فكم رقم تليفون يمكن تكونيه بشرط أن تكون أرقامه تصاعدية.

الحل:

لتوضيح ما هو مطلوب في هذا المثال ليكن لدينا الأرقام • و١ و٢ ويراد تكوين عدد تصاعدي منها فنجد أن جميع التبديل هي ٢٠، ١٢٠، ١٢٠، ١٢٠، ٢٠١ مرد ٢٠، المرد وهي ست تباديل وبغض النظر عن الترتيب فإنه يمكن اعتبار الرقم ٢٠٠ ممثل لكل هذه التباديل وبالمثل وبتكرار هذه العملية لجميع الأرقام الباقية مأخوذة ثلاثة بجد أن لكل ثلاثة أرقام يوجد عدد ٦ تباديل وبإختيار العنصر الذي يمثل هذه التباديل ويحقق الشرط المعطي فإننا نجد أن المطلوب هو إيجاد كل التباديل بغض النظر عن الترتيب أي حساب التوافيق ويكون عدد كل الأرقام المطلوبة هو لن.

$$1 + \frac{A \times 4 \times 1}{1 \times 7 \times 7} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

* بعض العلاقات الهامة للتوافيق:

قبل ذكر هذه العلاقات نعلم أن للتوافيق تطبيقات هامة في نظرية ذات





الحدين Binomid expunsion والتي تنص على أن لأي عدد صحيح موجب ن فإن:

$$(\mathbf{1}+\mathbf{1})^{\upsilon} = \sum_{c=1}^{\upsilon} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{0}} \\ c \end{pmatrix} \mathbf{1}^{c} \mathbf{1}^{c}$$

ويمكن برهنة العلاقات التالية:

$$\begin{pmatrix} \dot{\upsilon} \\ \upsilon - \dot{\upsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\upsilon} \\ \upsilon \end{pmatrix}$$
 (Y)
$$\begin{pmatrix} \dot{\upsilon} \\ \upsilon + \upsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\upsilon} \\ \upsilon + \upsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\upsilon} \\ \upsilon \end{pmatrix}$$
 (Y)

$$\Upsilon) \ \ C\begin{pmatrix} \dot{\upsilon} \\ \dot{\upsilon} \end{pmatrix} = \dot{\upsilon} \begin{pmatrix} \dot{\upsilon} - t \\ \dot{\upsilon} - t \end{pmatrix}$$

البرهان: إنظر الملحق بآخر هذا الفصل.

* وهناك علاقات أخرى هامة تذكرها فقط بدون برهان لأي أعداد صحيحة موجبة ل، ن، م فإن:

$$\begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda$$

$$\sum_{c=1}^{3} c \binom{c}{c} \binom{b}{a-c} = \binom{c+b}{a}$$

إذا كانت ن كبيرة أي أن ن $\longrightarrow \infty$ فإنه يمكن تقريب ن! باستخدام صيغة تسمى صيغة إستيرلنج Stirling's Formula وتعطى بالصورة.





حيث أن العلاقة ≈ تعني أن النسبة الممكونة من كلا الطرفان تـــؤول مــن الواحد الصحيح عندما نقترب ن من المالانهاية.

طرق سحب العينة:

أ. سحب العينة بإرجاع Sampling with replacement!

عندما يعاد كل عنصر من عناصر العينة المسحوبة إلى المجتمع (فضاء العينة) مرة أخرى قبل سحب أي عنصر آخر فإن عملية السحب هدة تسمى سحب بإرجاع وفيها يظل حجم المجتمع ثابت في كل مرة يتم فيها السحب. فهإذا أردنا سحب عينة بها ر من العناصر من مجموعة عناصر عددها ن حيث ن \geq ر فيإن العنصر الأول يتم سحبه بعدد ن من الطرق كذلك العنصر الثاني يتم سحبه بعدد ن من الطرق وهكذا فإن العنصر رقم ريتم سحبه بعدد ن من الطرق وهكذا فإن العنصر رقم ريتم سحبه بعدد ن من الطرق الغينة تبعا لقانون العد هو حاصل وبذلك يكون عدد الطرق في كل مرحلة ويكون ن. ن. ن. ن = 0

مثال (٤٠):

إذا كان لدينا صندوق به ٥ كرات حمراء و ٣ بيضاء فما هــو عــدد الطــرق لسحب عينة مكونة من كرتين: إذا كانت:

أ. الكرات حمراء

ب. الكرات البيضاء.

: 12

أ. عدد الطرق لسحب كرتات حراء = $0 \times 0 = 0$ طريقة.

ب. عدد الطرق لسحب كرتات بيضاء $= x \times x = 9$ طرق.





ب. سحب العينة بدون إرجاع Sampling without replacement:

في هذه الطريقة لإيعاد العنصر المسحوب مرة أخرى إلى مجموعة العناصر المسحوب منها العنصر وبذلك يتناقص عددها في كل مرة يتم فيها السحب. العنصر الأول: يتم سحبه بعدد (ن- العنصر الثاني يتم سحبه بعدد (ن- ١) من الطرق وهكذا فإن العنصر رقم ريتم سحبه بعدد (ن - ر + ١) من الطرق وبذلك فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم سحب عينة جمعها رهو حاصل ضرب عدد الطرق في كل مرحلة يتم فيها السحب ويكون مساوياً لـ:

ن(ن -۱) (ن-۲) (ن - ر + ۱).

* ملحوظة: أ. إذا كانت العينات المسحوبة غير مرتبة فإن عدد الطرق لسحب عينة جمعها ر بغض النظر عن ترتيب هو $\binom{\upsilon}{\upsilon}$ ولتسهيل عملية الكتابة سوف نكتب $\binom{\upsilon}{\upsilon}$.

 ب. إذا لم يذكر صراحة أن السحب تم بإرجاع فيفهم من ذلك أنه تم دون إرجاع.

مثال (٤١):

تم اختيار ٣ كتب عشوائياً من أحد الأرفق في مكتبة وكان يحتـوي على ٤ كتب رياضيات، ٣ إحصاء وقاموس أوجد احتمالات:

أ. وجود قاموس بين المجموعة التي تم اختيارها.

ب. الحصول على كتابين رياضيات وكتاب إحصاء.

الحل:

عدد الطرق لسحب القاموس = ل; طريقة.





عدد الطرق لسحب كتابين بخلاف القاموس= U' طريقة = ۲۱ طريقة عدد الطرق لسحب القاموس وسحب كتابين = U' × U' = ۲۱ طريقة عدد الطرق لسحب ثلاثة كتب عموماً.

اث = ۱٥ طريقة.

فإن كان أ هي حادثة سحب قاموس ضمن العينة فإن: ح(أ) = $\frac{Y1}{ro}$ = 40, • عدد طرق سحب كتابين رياضيات = $\frac{1}{ro}$ = $\frac{7}{ro}$ طرق.

عدد طرق سحب كتاب احصاء = ٤٪ = ٣ طرق.

فإذا كانت ب هي حادثة سحب كتابين رياضيات وكتاب إحصاء فإن عدد طرق وقوع الحادثة ب هو:

$$b_{\gamma}^{2} \times b_{\gamma}^{7} = \Lambda I$$
 طریقة، ح $(\psi) = \frac{\Lambda I}{\Gamma \alpha} = I \Upsilon \Upsilon, \sigma$

* ملحوظة: في (1) يمكن حساب عدد الطرق بالطريقة الآتية ٢ إحساء ولا شيء رياضيات وقاموس أو كتاب إحصاء كتاب رياضيات وقاموس أو كتابين رياضيات ولا شيء إحصاء وقاموس وهو ما كتابته كالآتي:

$$\left[\left(\begin{matrix} r \\ r \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \xi \\ r \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} r \\ r \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \xi \\ r \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} r \\ r \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \xi \\ r \end{matrix} \right) \right] \left(\begin{matrix} r \\ r \end{matrix} \right) \right] \right]$$

وباستخدام العلاقة (٩) فإن ل = ٣، ر = ٤، م =٢ فيكون الناتج.

$$Y = \begin{pmatrix} Y \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$





الملحق

برهان (١): تعتمد فكرة البرهان على كتابة المجموعة أكإتحاد مجموعتين متنافيتين وبإستخدام شكل من المقابل فإن:

واضح أن الحادثتين

1 ∩ ب، 1 ∩ ب متنافيتان لأن



 $\bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{$

الثالثة فإن:

$$(\widehat{\Box}\cap\widehat{\Box})$$
 \cup $(\widehat{\Box}\cap\widehat{\Box}))$ $=$ $=$ $(\widehat{\Box}\cap\widehat{\Box}))$

برهان (٢): يمكن كتابة إتحاد أي حادثتان بالصورة الآتية:

لكن الحوادث

ب و أ ∩ ب حوادث متنافية وباستخدام مسلمة الاحتمال الثالثة فإن:





وباستخدام النظرية السابقة فإن:

$$(1 \cap \overline{\overline{\Psi}}) = -(1) - -(1 \cap \overline{\overline{\Psi}})$$

وبالتعويض من معادلة (٢) في (١) ينتج البرهان.

برهان النتيجة:

۱) لأي فضاء عينة ع فإن ع 0 = 3 وحيث أن ع، 0 حادثتين متافيتان فإن باستخدام مسلمة (٣) فإن:

$$-(4) = -(4) + -(4)$$

وباستخدام مسلمة (٢) فإن ح(ع) = ١

$$\bullet = (\phi) \Longrightarrow \neg(\phi) = \bullet$$

 $\overline{\ \ \ }$ نعلم أن أ \bigcap $\overline{\ \ \ }$ أي أن أ، $\overline{\ \ \ }$ متنافيتين كذلك: ع \bigcap أ نعلم أن أ \bigcap نعلم أن أ \bigcap أي أن أ، أ

$$(\overline{1} \cup \overline{1}) = = (1 \cup \overline{1})$$

باستخدام مسلمة (٣) فإن:

$$\gamma = (1) + \gamma(1) + \gamma(1) = 1$$

$$(1) = (1) \implies (1) = (1) = (1)$$

٣) بكتابة ب بدلالة حوتث متنافية

$$(1-\psi) = -(1) + -(\psi-1)$$



لكن من مسلمة الإحتمال الأولى فإن:

$$(-1) \ge 0$$
 دائماً أي أن: ح(1) ≤ -1

٤) بفرض أن د = ب 🖰 جـ وبتطبيق نظرية (٢) على المجموعتين أ، د فإن

(1)
$$= (1 \cup c) = (1) + (1) = (1 \cap c)$$

لكننا نعلم من خواص الجموعات أن

اً د = ا ا (ب اج) = (ا اب) ل (ا اب) ا

لكن لدينا

$$-(____, (1)) + -((1)) = -(1) + -(1$$

بالتعويض من (ب) في (أ) ينتج البرهان:

* برهان بعض العلاقات الهامة للتوافيق:

1) لبرهنة
$$\binom{\dot{\upsilon}}{\upsilon} + \binom{\dot{\upsilon}}{\upsilon} + \binom{\dot{\upsilon}}{\upsilon}$$
 نعلم أن:

$$\begin{pmatrix} \dot{\upsilon} \\ \dot{\upsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\upsilon} \\ \dot{\upsilon} + \begin{pmatrix} \dot{\upsilon} \\ \dot{\upsilon} \end{pmatrix} = \frac{\dot{\upsilon}!}{c!(\dot{\upsilon} - c)!} + \frac{\dot{\upsilon}!}{(c+1)!(\dot{\upsilon} - c - 1)!} = \frac{\dot{\upsilon}!(c+1+\dot{\upsilon} - c)}{(c+1)!(\dot{\upsilon} - c)!}$$

$$=\frac{(\dot{\upsilon}+1)}{(\dot{\upsilon}+1)!(\dot{\upsilon}-c)!}=\frac{(\dot{\upsilon}+1)}{(\dot{\upsilon}+1)!(\dot{\upsilon}-c)!}=$$

Y) لبرهنة أن
$$\binom{\dot{c}}{c} = \binom{\dot{c}}{c-c}$$
 يمكن استخدام التعريف الأساسي كالآتي:



$$\frac{0!}{(0-1)!} = \frac{0!}{0!}$$

كذلك

$$\begin{pmatrix} \dot{0} \\ \dot{0} \end{pmatrix} = \frac{\dot{0}!}{(\dot{0} - \dot{0})!c!} = \begin{pmatrix} \dot{0} \\ \dot{0} - \dot{0} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{\dot{0}!}{(\dot{0} - \dot{0})!c!} = \begin{pmatrix} \dot{0} \\ \dot{0} - \dot{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - i \\ 0 \end{pmatrix}$$
 نرید برهنة أن د $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$C\binom{\dot{\upsilon}}{\upsilon}=c\cdot\frac{\dot{\upsilon}!}{(\dot{\upsilon}-c)!(\dot{\upsilon}-c)!}=\frac{\dot{\upsilon}!}{(\dot{\upsilon}-c)!(\dot{\upsilon}-c)!}=\frac{\dot{\upsilon}!}{(\dot{\upsilon}-c)!(\dot{\upsilon}-c)!}=\frac{\dot{\upsilon}}{(\dot{\upsilon}-c)!}=\frac{\dot{\upsilon}}{(\dot{\upsilon}-c)!}$$

٤) باستخدام نظرية ذات الحدين، وبوضع أ = ب = ١ فإن:

$$(t+1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{2^{n}} \binom{k}{k} (k)^{k} (k)^{\frac{n-k}{2}}, \qquad 7^{\frac{n-k}{2}} = \sum_{k=1}^{2^{n}} \binom{k}{k}$$

٥) أيضاً باستخدام نفس النظرية بوضع أ = ١٠، ب = ١ فإن:

$$(-l+l)^{\circ} = \sum_{c=-l}^{\circ} \binom{c}{c} (-l)^{c} (l)^{\circ -c}$$

$$\bullet = \sum_{c=1}^{n} \binom{c}{c} \binom{c}{c} \binom{c}{c} (-1)^{c}$$

7) نعلم أن
$$(m+p)^{i} = \sum_{c=0}^{n} \binom{i}{c} m^{c} + p^{-c}$$

بتفاضيل طرفي المعادلة السابقة بالنسبة لـ س فإن:

$$\dot{U}_{0}(m+\mu)$$
 فإن $\dot{U}_{0}(m+\mu)$ فإن $\dot{U}_{0}(m+\mu)$ فإن

$$\dot{\psi}(1+1)\dot{\psi}' = \sum_{k=1}^{N} c_k \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ c \end{pmatrix} \qquad \dot{\psi} T^{k-1} = \sum_{k=1}^{N} c_k \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ c \end{pmatrix}$$

تمارين

أ. أ، ب، ج د.

ن. آ،ب،ج،د

ج. ا∪ب، ا∩ب، ا-ب، ب ا

د. ب ∩جہ ب∩ د، ب ∪ د، ج ∪ ب

٢) في التمرين السابق عين الحوادث المركبة والبسيطة.

 ٣) قذفت قطعة نقود ثبلاث مرات. أوجد الحوادث التالية. واحسب عدد عناصرها.

أ= {الحصول على صورة في الرمية الأولى}.

ب= {الحصول على كتابة في الرمية الأولى والثانية فقط}.

جـ= {الحصول على ثلاث صور في الرميات الثلاث}.

د = {الحصول على صورة واحدة على الأكثر}.

٤) إذا كان ع هو فضاء العينة الناتج عن إلقاء حجري نرد متميزين، كـل حجـر





منهم مكون من ستة أوجه مرقمة من ١ إلى ٦ أوجد ع.

أ = ظهور عددين متساوين على حجري نرد.

ب = العدد الأول ٣ والعدد الثاني زوجي.

جه = مجموع العددين الظاهرين على حجري نرد ٨.

د = الفرق المطلق بين العددين الظاهرين هو ٣.

٥) في التمرين السابق أوجد ح(أ)، ح(ب)، ح(جـ)، ح(د).

٦) أوجد الفرق الدراسية تتكون من ١٥٠ طالب كانت نتائجهم في الاختبار كما
 يلي: ١٢٥ رسبوا في الاقتصاد ٥٠ رسبوا في الإحصاء، ٢٥ رسبوا في كلا
 المادتين ثم اختيار طالب عشوائياً من هذه الفرق أوجد الاحتمال:

أ. أن يكون الطالب رسب في الاقتصاد.

ب. أن يكون الطالب رسب في الإحصاء.

ج. أن يكون الطالب رسب في المادتين معاً.

٧) بفرض أن أ، ب، جـ ثلاث حوادث تكون تجزئ لفضاء ماع بحيث

$$(-1) = -(1) = -(1) = 7 - (1)$$

اوجد ح(أ)، ح(ب)، ح(جـ).

Λ) بفرض أن ح(1 ∪ ψ)= $\frac{α}{γ}$, $σ(1 ∩ ψ)=\frac{γ}{γ}$, $σ(\overline{ψ})=\frac{γ}{γ}$ feat σ(1), σ(ψ)

٩) صندوق يحتوي على ٦ كرات خضراء و ٤ كـرات سـوداء. سـحبت كرتـان
 بدون إرجاع فأوجد الإحتمالات الآتية:

أ. الكرة الأولى خضراء والثانية سوداء.

ب. الكرتان سوداء.





 ١٠) في فصل من فصول الحضانة كمان به ١٠٠ تلميـذ، كمان عمدد الأولاد ٧٥ وعدد البنات ٢٥ أوجد احتمال اختيار تلميذ ولد عشوائياً.

۱۱) بفرض أن ح $(| \bigcap_{i} \bigcap_{j} \bigcap_{j} \bigcap_{j}) = -(| \bigcap_{j} \bigcap_$

١٢) في فصل به ٩٥ طالب ٦٠ يدرسون الرياضيات، و٥٠ يدرسون الفيزياء
 و٣٠ يدرسون الأحياء فإذا كان ٢٥ يدرسون الرياضيات والفيزياء و١٠ يدرسون الفيزياء والرياضيات و٥ يدرسون

الثلاث معاً. اختير طالب عشوائياً فما هـو احتمـال أن يكـون الطالـب مـن دارسـي المواد الثلاث.

۱۳) صندوق مجتوي على ٣ كرات بيضاء و٤ كرات سوداء و٥ حمراء. سحبت ثلاث كرات عشوائباً فأوجد الاحتمالات الآتية:

أ. الكرات الثلاث حراء.

ب. كرتان سوداء وواحدة حمراء.

١٤) القي حجر نرد فأوجد الاحتمالات الآتية:

أ. مجموع الرقمين الظاهرين ٦.

ب. مجموع الرقمين ٦ أو العد الأول زوجي.

جـ. العددان متساويان.

د. العددان فرديان.





 اذا كان لدينا ١٠ رجال و ٦سيدات بكم طريقة يمكن بها تشكيل لجنة مكونة من ٤ رجال و٣ سيدات.

١٦) بكم طريقة يمكن أن يجلس ٦ أفراد على طاولة مستديرة.

۱۷) بفرض أن أ وب وجـ ثلاث حوادث متنافية وتكـون تجـزئ لفـضاء مـا ع
 بحيث ح(جـ) = ۱/۲، ح(أ) = ح(ب) فأوجد ح(أ)، ح(ب).

۱۸) برهن لأي ثلاث حوادث أ، ب، جـ فإن = ح(أ \cup ب \cup جـ = ح(أ) + ح(ب) + ح(جــــ) – ح(أ \cap ب - ح(أ \cap ب - ح(أ \cap ب - ح(أ \cap ب - ح).

١٩) قدر لشخصان هما أ، ب أن يتقابلا فيما بين الساعة الثالثة والرابعة بعد الظهر على أن لا ينتظر أي منهما الآخر أكثر من ١٥ دقيقة ما هو إحتمال أن يتقابلا.

۲) اختیرت نقطتان عشوائیاً على خط مستقیم طوله ۱> أوجد إحتمال أن
 تكون الخطوط الثلاثة المكونة من ذلك یكن أن تكون أضلاع مثلث.

 ٢١) صندوقان الأول يحتوي على ٤ كرات بيضاء و٢ سوداء أما المصندوق الثاني فيحوي ٣ بيضاء و٥ سوداء إذا سحبت كرة من كل صندوق أوجد إحتمال:

١. الكرتين بيضاء.

٢. الكرتين سوداء.

٣. كرة بيضاء وآخر سوداء.





نظرية رول – نظرية التزايدات المحدودة – الأوضاع غير المعينة



الفصل الخامس

نظرية رول _ نظرية التزايدات المحدودة _ الأوضاع غير المعينة

تمهيد نظري:

١. نظرية رول:

إذا كا ق(س) تابعاً مستمراً ضمن الجمال (أ، ب) وكمان ق(أ) = ق(ب) وإذا كان لهذا التابع مشتق من أجل كل قيمة لـ س واقعة ضمن المجمال المذكور، فإنه يوجد على الأقل عدد واحد جـ واضع ضمن هذا المجمال يكون من أجله مشتق التابع المفروض معدوماً.

٢. دستور التزايدات المحدودة:

إذا كان ق(س) تابعاً مستمراً ضمن الجال (أ، ب) وله مشتق من أجل كل قيمة لـ س ضمن هذا الجال فإنه يمكن إيجاد عدد جـ واقع ضمن الجال المذكور ويحقق العلاقة ق(ب) – ق(١) = (ب-١) ق(ج).

يسمى هذا الدستور أيضاً بدستور القيمة المتوسطة.

إذا فرصتنا أن القيممة المطلقة للمشتق ق(m) محدودة ضمن الحجال المذكور بعدد نرمز له بـ ($|\bar{g}(m)| < 2$) وإذا كـان m_1 و m_7 عـددين واقعـين ضـمن |4| المجال المذكور فإنه ينتج عن ذلك المتراجحة:

|ق(my) - ق(m)| < 12 |my - m| | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 | 159 |



٣. الاشكال غير المعينة:

أ. الشكل \div : إذا انعدم كل من حدي الكسر $\frac{\dot{o}(n)}{\dot{o}(n)}$ من أجل س = 1 فانه ليس فذا الكسر أي معنى عدد من أجل هذه القيم ونقول إنه:

يمثل عدم تعيين من الشكل ÷.

ب. الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. اذا سعى كل من حدي الكسر المذكور أعلاه إلى ∞ فإننا نقـول أن الكسر بمثل من أجل س = 1 عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

جـ. اذا انتهى أحد مضروبي الجـداء ق(س). ل(س) إلى ∞ وانتهى الآخر إلى
 الصفر وذلك عندما يسعى المتحول س إلى قيمة معينة 1، فاننا نقـول أن هـذا
 الوضع يمثل عدم تعيين من الشكل م، ∞.

د. إذا كان لدينا تركيب جبري يأخذ من أجل قيمة ما لـ س، أحمد الاوضاع:
 ث، ۵٬۰۵۰, فاننا نقول إنه يمثل من اجل هذه القيمة شكلا من أشكال عدم التميين.

٤. قاعدة اوييتال Hopital:

إن القيمة الحقيقة الكسر $\frac{\ddot{b}(\omega)}{b(\omega)}$ الذي ينعدم حداه من أي س = أ تساوي قيمة الكسر الناتج عن الكسر المفروض بابدال كل حد من حدية بمشتقه $\frac{\ddot{b}(\omega)}{b(\omega)} = \frac{\ddot{b}(\omega)}{b(\omega)} = \frac{\ddot{b}(\omega)}{b(\omega)}$

يمكن تطبيق قاعدة اوبتال في الحالة الثانية من حالات عدم التعيين أي





عندما يسعى كل من ق(m) ل(m) إلى ∞ وذلك عندما ينتهى س إلى 1.

نعيد الحالة الثالثة إلى إحدى الحالتين الأولى والثانية وذلك بأن نكتب الجداء المفروض بالشكل ل(m). $\bar{b}(m)$

ويمكن عندها تطبيق قاعدة اوبتال إلى الشكل الجديد. أما الحالات الاخيرة فاننا نعيدها إلى سابقاتها بأن نأخذ بـدلاً عنهـا الأشكال الـــي تنــتج عنهـا بأخــذ لوغارتم هذه التراكيب.

٥. مشتق تابع المركب:

ليكن التابع ص = ق(ي، ع، و) حيث ي، ع، و توابع لـ(س) ذات مشتقات. يرهن أن مشتق ص يعطى العلاقة:

٦. الخطأ القياسي:

ليكن التابع ق(س) ولنفرض اننا نريد حساب قيمة لهذا التابع من أجمل قيمة ما لـ س نرمز لها بـ إ ولنفرض أيضاً أننا لا نعرف القيمة الحقيقة لـ إ بمل قيمة تقريبة أ حيث أ- أ > 3 سنرتكب بنتجية هذا الحساب خطأ يساوي طبعاً للى:

ق (۱) – ق (۱).

نسمى هذا الخطأ بالخطأ القياسي ويعطى إستناداً إلى دستور التزايـدات المحدودة بالعلاقة:





$$(\infty) = ((-1)) = ((-1))$$

حيث ∞ واقع في المجال (١٠٩). إن لهذا الخطأ حداً اعلى يساوي جداء ع الحد الأعلى لـ(١-٩) بـ أ الحد الأعلى لـ قر(س) ضمن المجال (١٠١).

تمارين محلولة:

١) حقق نظرية رول على التابع: ق(س) = س٣ - ٤ س

یمکننا أن نکتب همذا التمابع بالمشکل ق(س) = س(س+۲) (س-۲) ونلاحظ أنه:

وأن مشتقة ق $(m) = 7m^7 - 3$ موجود من أجل كل قيمة لـ س.

لأن المشتق ينعدم من أجمل $\frac{\overline{\gamma}\sqrt{\gamma}}{\gamma}$ و $\frac{\overline{\gamma}\sqrt{\gamma}}{\gamma}$ ونلاحظ بسهولة أن القيمة الأولى تحقق المتراجعة:

$$-7 < \frac{\sqrt{7}}{\gamma} > 0$$
 وتحقق القيمة الثانية المتراجحة: $0 < \frac{\sqrt{7}}{\gamma} < \gamma$.

۲) لیکن التابع ص = هـ صحق دستور النزایدات الحدودة علی هذا التابع من أجل ا = ا و ا = ا تقول نمظریة القیمة الوسطی (أو دستور النزایدات الحدودة) أنه یوجد ضمن المجال (۱،۴) عدد نرمز له بـ جـ محقق العلاقة:





ومن المعلوم أن ق(س) = هـ صوالطلوب ايجاد عدد جـ يحقق العلاقة:

إذا أخذنا ٢,٧١٨٢٨ قيمة تقريبية للعدد هـ فإنه يكون:

لو ۱۰۷۱ < لو (۱ - هـ) < لو ۱۰۷۲

ويكون

٠,٥٣٧ > جد > ٧٣٥,٠

ومن الواضح أن جـ واقع ضـمن الجـال (٠،١) وهـذا مـا يحقـق دسـتور التزايدات الحدودة.

٣) حقق نظرية رول على التابع:

ق (س) = (س-۱) (س-ب) درس عددان صحیحان > ٠

ینعدم هذا التابع من أجل س = \P و س = Ψ فلنبرهن أن مشتقة ینعـدم من أجل قیمة لـ س واقعة ضمن المجال \P ، Ψ)، إن مشتق هذا التابع هو:

ق (س) = (س-۱) $^{1-1}$ (س-ب) $^{1-1}$ {(م+ن) س-م ب - ن ۱} الـــــذي ينعدم من أجل:

 $w = \frac{4y+i\frac{d}{2}}{4+i}$ من السهل البرهان أن هذه القيمة واقعة بين العددين $\frac{4y+i\frac{d}{2}}{4}$

3) ليكن التابع: ق $(m) = \frac{m+2}{m}$ والمطلوب حساب حد أعلى للخطأ القياسي.





 π , الناتج عن حساب قيمة هذا التابع من أجل س = π وذلك ناخـذ π , القيمة تقريبية للعدد π , بما أننا نعرف المرتبة العشرية الثانيـة في π فإنـه يمكننـا أن نكتب.

 Ψ , 18 < π < Ψ , 184

والخطأ المرتكب في π هو: $7 imes 1^{-7} > 3$

لنحسب الآن أ الحد الأعلى لمشتق التابع ق(س) إن هذا المشتق هو:

ق (س) =
$$\frac{1-Y \ln^{\gamma} - Y \omega^{\gamma}}{(1+^{\gamma})}$$
 إن من الصعب جداً ان نحسب النهاية

العظمى لهذا التركيب لأنه يجب عندها ان ندرس تحولات هذا التركيب ضمن المجال (٣,٢ ،٣) بل تكتفي بأخذ حد أعلى له، حاصل قسمة القيمة المطلقة لحد أعلى للمخرج ومن السهل حساب الحد الأعلى للصورة على القيمة المطلقة لحد أدنى للمخرج ومن السهل حساب الحد الأعلى للصورة بصورة صحيحة تماماً ولكن من المستحسن في مشل هذه الحسابات أن نرضى بقيمة قليلة الموافقة ولكنها سهلة الحساب. فبما ان س موجب فانه يمكننا ان نكتب:

$$|1-11m^7-1m^7| < 1+11m^7+m^7 < 1+11(71, 7)^7 + 7(71, 7)^7$$

] also liften for the second of the second content of the second conte

أما المخرج فمن الواضح أنه موجب ومتزايـد وتكـون قيمتـه الـصغرى في الحجال (٣,٢، ٣) هو (٣،٢ / ١ - ٢٨ × ٧٨٤

يكننا أن نأخذ أ = $\frac{19}{3 \, \text{VM}} = 1$, • ومن المستحسن أن نزيد في هذا العدد





وناخذه مساوياً ٢٥,٠ من أجل السهولة في الحساب.

غيد أخيراً، كحيد أعلى للخطأ القياسي المرتكب: أ. $3 = \frac{\tau}{1}$ وهذا يعني أنه عندما نبدل العدد الحقيقي الصحيح: $\frac{\pi+3}{1+7}$

بالعدد التقريبي: $\frac{\xi + r, 1 \xi}{1 + r}$ فاننا نرتكب خطأ لا يزيد على ٠٠٠٠٥

٥) لنكتب دستور التزايدات المحدودة بالشكل:

 $\ddot{v}(\omega + b) = \ddot{v}(\omega) + b\ddot{v}(\omega + \theta b).$

 $\theta > 0$ یطلب حساب التابع ق θ نتکون θ مستقلة عن س.

لنفرض ي = θ ل حيث ي تابع لـ ل فقط استناداً إلى فرض θ غـــــر تابعـــة لـ س فيكون:

$$(m+b) = \tilde{b}(m) + b \tilde{b}(m+y)$$

لنشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ ل ثم بالنسبة لـ س ولنرمـز بــ يَ لمـشتق ي بالنسبة لـ ل فنجد قَ (س+ل) = قَ (س+ي) + ل يَ قَ (س+ي)

$$\vec{v}(m+b) = \vec{v}(m) + \vec{v}(m+a)$$

بعد أن نلاحظ، استناداً إلى خواص اشتقاق التوابع المركبة، ان مشتق ق(س+ل) بالنسبة لـ ل يساوي مشتقة بالنسبة لـ س.

لنكتب ان قيمتي قَ (س+ل) متساويتان فنجد:

(1)
$$\tilde{b}$$
 $(m+b) - \tilde{b}$ $(m) = b$ $(1-2)$ \tilde{b} $(m+b)$





لنشتق العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ س فنجد:

(٢)
$$\vec{v}$$
 (m+b) $-\vec{v}$ (m) = b (1- \vec{v}) \vec{v} (m+b)

ونستنتج من العلاقتين (١)، (٢) العلاقة:

$$\frac{(J+\omega)^{(\tau)}}{(\omega+J)-\tilde{\upsilon}^*(\omega)} = \frac{(J+\omega)^{(\tau)}}{\tilde{\upsilon}^*(\omega)+\tilde{\upsilon}^*(\omega)}$$

ان هذه العلاقة محققة مهما كانت قيمة س وهي محققة بصورة خاصة من اجل س= • أي:

$$\frac{\dot{v}^{(r)}(v)}{\dot{v}^{(r)}(v) - \dot{v}^{(r)}(v)} = \frac{\dot{v}^{(r)}(v)}{\dot{v}^{(r)}(v) - \dot{v}^{(r)}(v)} = \frac{\dot{v}^{(r)}(v)}{\dot{v}^{(r)}(v)} = \frac{\dot{v$$

ومن السهل أن نبرهن أن هذا التابع يجقـق الـشرط المفـروض ونجـد أن 9 مستقلة عن كل من س، ل وهي تساوي لم.

لنفرض الآن أن جـ \neq • فنحصل على المعادلة التفاصلية التالية بعـد أن نفرض ص = قَ(ى).





ص – جـ ص+جـ_١=٠ ونجد التكامل العام: ص=ق(ي)= - + جـ ٩هـ ت س ويكون ق(ي) من الشكل.

ق(ي) = أ+ب ي + جـ هـ أ^ي ونجد أخيراً: ق(س)=أ + ب س + جـ هـ أ^ي.

إذا وضعنا هذه القيمة في دستور التزايدات المحدودة فإننا نجد بسهولة قيمة:

$$\theta = \frac{1-\frac{1}{2}}{4L} \cdot Le \frac{a^{-1}-1}{4L}$$

٦) إذا فرضنا ١ < ب برهن صحة العلاقتين:

1.
$$\frac{\psi-\eta}{1+\psi^{\gamma}} < \overline{g}_{\theta} = 0 \quad \text{if } \eta < \frac{\psi-\eta}{1+\eta^{\gamma}}.$$

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{\pi}{\xi} < \frac{\xi}{\xi}$$
 ب. $\frac{\pi}{\gamma} + \frac{\pi}{\xi} < \frac{\pi}{\xi}$

لنفرض: ق(m) = قوس ظاس ولنطبق على هذا التابع نظريـــــة التزايــــدات المحدودة بعد ان نلاحظ أن: ق(m) = $\frac{1}{1+m^{-1}}$

قوس ظاب – قوس ظام= (ب-م) $\frac{1}{1+\sqrt{1+1}}$ بما أن جـ محصورة بين δ و و فإن:

$$1+q^{7} < 1+\frac{1}{2} < 1+\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\frac{1}{2}} < \frac{1}{1+\frac{1}{2}} < \frac{1}{1+q^{7}}$$





ويكون أخيراً:

$$\frac{1-\frac{1}{\gamma}}{\gamma+1} > 1$$
 قوس ظا $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ قوس ظا

لنفرض الآن 1 = 1، $y = \frac{3}{\pi}$ فتأخذ المتراجحة المضاعفة السابقة الشكل.

$$> \frac{\tau}{\gamma} < \overline{\epsilon}$$
 قوس ظا $\frac{\tau}{2} - \overline{\epsilon}$ قوس ظا $\frac{\tau}{\gamma} > \frac{\tau}{\gamma}$ قوس ظا $\frac{\tau}{\gamma} < \frac{\tau}{\gamma}$ قوس ظا $\frac{\tau}{\gamma} > \frac{\tau}{\gamma}$

۷) لیکن التابع ق(س) = ۱ – (س-۱) حیث $\cdot \leq \omega \leq \Upsilon$ لماذا لا یمکن تطبیق نظریة رول علی هذا التابع ؟

إن شروط تطبيق نظرية رول على تابع ما هي أن يكون هـذا التـابع معينـاً ومستمراً ضمن الحجال المفروض وأن يكون له مشتق (محدود) من أجل كـل قيمـة من قيـم (١٤ب) وأن يكون:

غير مستمر ولا محدود من أجل س = ١ لـذا لا يمكـن إيجـاد قيمـة لـــ س واقعة ضمن الجمال (٠٠ ٢) تجعل ق(س) معدوماً.

A) dبق قاعدة اوبيتال واحسب:
$$= \frac{1-\gamma}{m} \frac{1-\gamma}{m}$$

نجد على التوالي بعد ان ترمز للكسر المفروض بالشكل: <u>ق(س)</u> الجد على التوالي بعد ان ترمز للكسر المفروض بالشكل: المرس





$$\begin{array}{lll} \frac{\delta_{i}(\omega)}{\delta_{i}(\omega)} &= \frac{\delta_{i}(\omega)}{$$

لقد طبقنا قاعدة اوبيتال اربع مرات لأنه نتج عن تطبيقها في المرات الثلاث الأولى اوضاع عدم تعيين من الشكل ÷

لنطبق عليه قاعدة اوبيتال فنجد: نهما $\frac{L_0}{L_0} = \frac{L_0}{L_0} = \frac{L_0}{L_0}$

(1) احسب نهيا $\frac{w^{-}}{w^{-}}$: عندما تسعى س إلى (∞) يأخذ الكسر الشكل $\frac{\infty}{w}$ لنطبق قاعدة أوبيتال فنجد نهيا $\frac{w^{+}}{w^{-}}$ = نهيا $\frac{Y}{w^{-}}$ = $\frac{$

ا ۱) أحسب: نهـــاقـاس-ظاس عندما ينتهـي المتحـول س إلى $\frac{\pi}{\gamma}$ فـإن التركيب $\frac{\pi}{\gamma}$

المفروض يأخذ الشكل $\infty - \infty$ لنطبق قاعدة أوبيتال على هذا التركيب الذي يمكن كتابته بالشكل:





نقاس - ظاس = $\frac{1}{\sin w} - \frac{1}{\sin w} = \frac{1-\sin w}{\sin w}$ نلاحظ أن الكسر

الأخير يأخذ الشكل \div عندما يسعى س إلى $\frac{\pi}{2}$ فلنطبق عليه قاعدة اوبتال:

$$\bullet = \frac{m \ln - 1}{m \ln - 1} = \frac{m \ln - 1}{m \ln -$$

١٢) احسب القيمة الحقيقية للتركيب سٌ هـ س وذلك عندما يسعى س إلى ∞.

عندما ينتهي س إلى ∞ يأخمذ همذا التركيب الوضع غير المعين (٠) ∞ ويمكن كتابة التركيب المفروض بالشكل:

 $_{\omega_{\omega_{\infty}}}^{\infty}=0$ نهيا $_{\omega_{\infty}}^{\infty}=0$ الذي يأخذ الشكل $_{\infty}^{\infty}$ عندما تسعى س إلى $_{\omega_{\infty}}^{\infty}=0$.

لنطبق قاعدة اوبيتال فنجد:

١٣ احسب القيمة الحقيقية للتركيب س. لـوس وذلـك عنـدما يسعى س إلى •
 يكن كتابة هذا التركيب بالشكل التالي ونطبق عليه قاعدة اوبيتال:

$$\mathbf{i}_{\omega \rightarrow \omega} = \frac{\mathbf{i}_{\omega \rightarrow \omega}}{\mathbf{i}_{\omega \rightarrow \omega}} = \frac{\mathbf{i}_{\omega \rightarrow$$

يجب أن نأخذ في هذا المثال النهاية من يمين الصفر لأنه لا يوجد لوغــاريتـم للاعداد السالية.

١٤) احسب نهاية التركيب ص = س جا س وذلك عندما يسعى س نحو الصفر.





يأخذ هذا التركيب الشكل (٠) عندما يسعى س نحو الصفر ويمكن تحويله إلى شكل يطبق عليه قاعدة أوبيتال بأخذ لوغاريتم طرفي هذه العلاقة:

$$\frac{i_{\ell_0 m}}{\ell_0 m} = \frac{i_{\ell_0 m}}{\ell_0 m}$$
 لوص = جات قاس

ويكون نهاص=ه ١=١

١٥ احسب نهاية التركيب ص = (ظتا ظاس) وذلك عندما يسعى س إلى الصفر.

عندما يسعى س إلى الصفر يأخذ هذا التركيب الوضع ∞. نأخذ لغاريتم الطرفين فنجد:

عندما نجعل س → ٠، يأخذ الكسر الاخير الوضع غير المعين ﷺ فلنطب عليه قاعدة اوبيتال:

$$= \underbrace{\mathsf{i}}_{\omega \to -} \underbrace{\mathsf{i}}_{\omega$$

أي: نها لوص، و:نها من ا





17) احسب نهاية التركيب ص= س أن وذلك عندما يسعى س إلى الواحد. عندما يسعى س إلى الواحد. عندما يسعى س إلى الواحد يأخذ التركيب المفروض الشكل ∞₁ فلنأخذ لغرايتم طرفى العلاقة المفروضة فنجد:

$$\frac{u}{u} = \frac{u}{1-u}$$

ان الطرف الثاني من هذه العلاقة يأخذ الشكل ÷ عندما تجعل س تنهي إلى الواحد فلنطبق قاعدة اويبتال:

$$\frac{1}{\log w} = \log w = \log w$$

$$\log w = \log w$$

تمارين:

۱۷ حقق نظریة رول من أجل التابع: ق $(m)=m^{2}(1-m^{2})$ ، $0 \leq m \leq 1$

۱۸) برهن أنه يوجد بين كل جذرين حقيقين للمعادلة: هـ سجاس=١، جذر حقيقي للمعادلة: هـ سجتاس ١٠ - ٠

٠٢) برهن استناداً إلى دستور التزايدات المحدودة، صحة العلاقة:





$$\frac{1}{r} + \frac{\pi}{r} > 0, \tau = \frac{\pi}{r} + \frac{\pi}{r}$$

٢١) حقق نظرية رول على التوابع التالية: ق(س) = س⁷ – س⁷ – ٤س +٤،
 ق(س) = ٢١س – س⁷ ق(ت) = جنا (ت/٢)، ق(ت) = جا ت

٢٢) برهن أن نظرية رول لا يمكن تطبيقها على التواسع التالية ضمن الجالات المرافقة وبين أسباب ذلك:

$$-1 \leq m \leq 1$$
 : ق $(m) = 1 - m$: $1 \leq m \leq 1 - m$: $m \leq m \leq 1 + m$: $m \leq m \leq m$: $m \leq m \leq m$

٢٣) حقق نظرية التزايدات المحدودة على التوابع التالية:

$$^{"}$$
س = $^{"}$ ، $^{"}$ ، $^{"}$. $^{"}$

۳س+۲

* احسب النهايات الآتية وتحقق من الأجوبة المبينة بعد هذه المجموعة من التمارين:

$$\frac{1}{2}$$
) $\frac{1}{2}$ $\frac{$





$$\frac{\theta - e^{iQ}}{2} \underbrace{\frac{\theta - e^{iQ}}{\theta + \theta}}_{3+} \underbrace{\frac{\theta - e^{iQ}}{\theta + \theta}}_{3$$

الاجوبة:

(1)
$$(\Upsilon^{\mu})$$
 (Υ^{μ}) (Υ^{μ}) (Υ^{μ}) (Υ^{μ})

(1) (YA 6

احسب القيم الحقيقية للتراكيب التالية من اجل القيمة المرافقة لكل منها وتحقق من الجواب المثبت بجانب معضها:



Idad I Idahu

$$\frac{1}{1-}==$$
 θ θ θ θ θ θ θ θ θ

$$\frac{1-}{2}$$
 $\frac{1-}{2}$ $\frac{1-}{2}$ $\frac{1-}{2}$ $\frac{1-}{2}$ $\frac{1-}{2}$ $\frac{1-}{2}$ $\frac{1-}{2}$

$$i = \omega_0 : \frac{1}{1 - \omega_0} - \frac{1}{1 - \omega_0} (\xi Y)$$

$$1 = \pi$$
 , $\alpha = \alpha$, α if α (27)

Ya)
$$\left(\stackrel{\cdot}{A} + \stackrel{\cdot}{U} \right)^{-1} = A$$



طرق إيجاد مقدرات النقطة



الفصل السادس طرق إيجاد مقدرات النقطة

مقدمة:

علمنا سابقاً الخواص التي نريد لمقـدر نقطي أن يتـصف بهـا واظهرنـا أن المقدر الجيد بشكل عام هو الذي تتوفر فيه الصفات الآتية:

- ١. الكفاية.
- ٢. عدم التحيز.
 - ٣. الإتساف.
 - ٤. الكفاءة.

وهناك عدة طرق تعطي مقدرات تتصف بكل أو بعض تلك السفات. وفي هذا الفصل سندرس بعض الطرق الشائعة الاستخدام في الإحصاء للحصول على المقدرات.

طريقة المعقولية العظمة Maximum Likelihood method

في مقالتين نشرتا عام ١٩٢٠م، عرض فيهما العالم فيشر (R.A.Fisher) أحد رواد الإحصاء في عصرنا طريقة عامة للتقدير أطلق عليها اسم طريقة المعقولية العظمى أو الإمكان الأكبر، كما بين مميزات هذه الطريقة. نعتبر طريقة





المعقولية العظمى إحدى أهم وأكثر الطرق انتشاراً في الإحصاء لتقدير معـالم التوزيع الاحتمالي الإحصائي (النموذج الإحصائي) المقترح.

إذا كانت $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_0)$ عينة عشوائية من مجتمع توزيعه الاحتمالي ق $(\mathbf{m}; \theta)$ ، فإننا سنرمز لمقدار المعلمة θ الذي نحصل عليه باستخدام طريقة المعقولية العظمى بـ $\hat{\theta}(\mathbf{m})$ ، كما سنرمز لمقـدر دالـة معلمية $\hat{\tau}(\theta)$ بـ $\hat{\tau}(\mathbf{m})$ ، ومن ثم التقدير بنقطة الموافق لعينة مشاهدة $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_0)$ بـ $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{m})$ و $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\mathbf{m})$ على الترتيب.

لتكن س= (س،، ،،،، سن) عينة عشوائية من التوزيع:

 $\{\theta \ni \theta^{i}(\theta^{i} \cup \theta^{j}) \in \delta\}$ $\{\xi\}$

و $L(\omega;\theta)$ دالة المعقولية من أجل قيمة ملاحظة $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_0)$ للعينة ω .

 $b(\omega : \hat{\theta}) = \underbrace{\text{ins. Energy } b(\omega, \theta)}_{\theta : \theta}$

 θ وهذا يعني أن التقدير $\hat{\theta}$ في حالة التوزيعات المنقطعة عبارة صن قيمة θ التي تجعل احتمال سحب العينة المشاهدة س(قيمة لـ س) أكبر مما يمكن. أما بالنسبة للتوزيعات المستمرة فإن قيمة θ التي تجعل احتمال الحصول على مفردات





العينة س قريبة جداً من القيم التي حصلنا عليها (القيم س،سن) أكبر مــا يمكن ويمكن تفسير ما سبق على النحو الآتى:

إذا فرضنا أن θ ملعومة ولتكن θ .، فإن قيمة س التي يكون وقوعها أو تحققها أكثر احتمالاً هي تلك القيمة ولنرمز لها بـ س = (m_i, \dots, m_m)) التي تجعل الدالة D الحرف و القلم ما يمكن. وعندما نأخذ D قيمها الممكنة في فضاء المعلمة D فإنها تعرف من أجل قيمة D و دالة كثافة (أو دالة الاحتمال) معينة وبالتسالي مجتمعاً معنياً. وبعـد الحـصول فعـلاً علـى قيمة مـشاهدة D والتسالي مجتمعاً معنياً. وبعـد الحـصول فعـلاً علـى قيمة مـشاهدة D المنينة D المعينة D المعينة المناهدة D المنينة D المعينة عمل المعينة المناهدة D المعتمل معكن، أي نريـد الذي يمكن أن يعطي عمل تلك المعينة المناهدة D أنجعل دالة المعقولية D عندها في إنجاد قيمة D من D (نرمز لها بـ D) تجعل دالة المعقولية D عندها في نسمى تقدير المعقولية العظمى و D (س) بمقدر المعقولية العظمى.

إذا كان من أجل كل قيمة $m \in \mathbb{C}$ دالة المعقولية $\mathbb{C}[m]$ تبلغ نهايتها المظمى عند نقطة داخلية من فضاء المعملة $\mathbb{C}[m]$ وقابلة للاشتقاق بالنسبة $\mathbb{C}[m]$ فإن تقدير المعقولية المظمى $\mathbb{C}[m]$ $\mathbb{C}[m]$ عقق المعادلة:

$$\frac{c \cup (\omega, \theta)}{c \theta} = \sqrt{16} \quad \frac{c \cdot (\omega, \theta)}{c \theta} = \sqrt{16}$$

بالإضافة إلى المتباينة:

$$\frac{\epsilon^{\gamma}U(\omega;\theta)}{\epsilon\theta^{\gamma}}<\cdot \qquad \text{ îs } \frac{\epsilon^{\gamma}}{\epsilon}\frac{U(\omega;\theta)}{\epsilon\theta^{\gamma}}<\cdot \dots \tag{7}$$

وهذا يعني، أننا نحصل على التقدير $\hat{\theta}$ بحل المعادلة (٢) بعـد التأكـد مـن تحقق المتباينة (٣).





أما إذا كانت المعلمة θ متعددة الأبعاد، أي $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ ، فإن التقدير $\hat{\theta}$ نحصل عليه بحل منظومة المعادلات:

$$\frac{\iota \cup (\iota, \theta)}{\iota \theta_{\nu}} = \cdot \qquad \qquad ; \quad \mathcal{I} : \mathsf{I} :$$

لنرى الآن بعض الأمثلة لإيجاد مقدّرات المعقولية العظمى.

مثال(١):

إذا كان س=(س،،...سن) عينة عشوائية من مجتمع كثافة توزيعه الاحتمالية:

ق $(\omega, \theta) = \theta^{A^{-0}}$ س $> \cdot \cdot \theta > \cdot \theta$ فأوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ .

ما أن:
$$U(\omega^2\theta) = \theta^{\vee} = \Phi^{\vee}$$
 فإن

$$l_{\infty} \cup l(\psi, \theta) = 0 \quad l_{\infty} \theta - \theta \sum_{i} \psi_{i} = \frac{c}{c} \frac{l_{\infty} \cup l(\psi, \theta)}{c\theta} = \frac{\dot{\psi}}{\theta} - \sum_{i} \psi_{i}$$

$$e = \frac{c}{c} \frac{\log_2 U(\omega; \theta)}{\log_2 \omega} = e \Rightarrow \frac{\dot{\omega}}{\theta} - \sum_{i} \omega_i = e$$

و کل هذه المعادلة بالنسبة ل θ محصل على تقدير المعقولية العظمى: $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\omega) = \frac{\dot{\upsilon}}{\sum \upsilon_v} = \frac{\dot{\upsilon}}{\upsilon} = 0$ ومن ثم فإن مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ هو: $\hat{\theta}(\omega) = \frac{\dot{\upsilon}}{\varepsilon}.$





مثال (٢):

إذا كانت $w=(w_1,...w_n)$ عينة عشوائية من توزيع بواسوان $\Pi(\theta)$ ، $-i \theta$ وجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ .

$$\dots$$
 با آن: ق $(\omega^{\dagger}\theta) = \frac{\sigma^{-}\theta}{\omega_{0}!}$ ه $\sigma^{-}\theta$ با $\sigma^{-}\theta$ با $\sigma^{-}\theta$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{U}}$$
: $\mathbf{U}(\mathbf{w}^{2}\mathbf{\theta}) = \frac{\mathbf{e}^{\sum_{i} \mathbf{v}_{i}}}{\prod_{i} \mathbf{v}_{i}!} \mathbf{e}^{-\mathbf{v}\mathbf{\theta}}$

لود ل($(\omega, \theta) = -i\theta + \sum_{n} (\omega, \theta - \sum_{n} (\omega_n))$ وبالتالي:

$$\frac{c \, \log_{L} U(w; \theta)}{c \theta} = -c + \frac{\sum_{i} v_{i}}{\theta}$$
 بوضع $\frac{c \, \log_{L} U(w; \theta)}{c \theta} = 0$ وحلها بالنسبة

له θ نجد:

$$\frac{\overline{\sum_{i} v_{i,y}}}{\dot{v}} = \dot{v} + \hat{\theta}(v_{i}) = \hat{\theta}(v_{i}) = \frac{\overline{\sum_{i} v_{i,y}}}{\dot{v}} = v_{i}$$

ومقدر المعقولية العظمى لـ θ يكون: $\hat{\theta}(m) = \overline{m}$ ونلاحظ بسهولة أن \overline{m} مقدر غير متحيد لـ θ .

مثال (٣):

لتكن س=(س،،...س،) عينة عشوائية من توزيع ن(θ ،) ونرغب في إيجاد مقدر المعقولية العظمى لـ θ .

$$\frac{1}{2} (u-u) \frac{1}{10} = \frac{1}{2} a \frac{1}{\pi \sqrt{V} \theta}$$
 کما نعلم ق $(u^2 \theta)$





 $(\mu_{-\nu})^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1$

$$l_{e_{\perp}} U(\omega;\theta) = -\frac{\dot{\upsilon}}{\gamma} \; l_{e_{\perp}} \gamma_{\pi} - \frac{\dot{\upsilon}}{\gamma} \; l_{e_{\perp}} \theta^{\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma \theta^{\gamma}} \sum (\omega_{\upsilon} - \mu)^{\gamma}$$

$$\frac{\epsilon \cdot \log_2 U(\omega;\theta)}{\epsilon \theta} = \frac{-\dot{\upsilon}}{\gamma \theta^{\gamma}} + \frac{\dot{\upsilon}}{\gamma \theta^{3}} \sum_{b=1}^{\omega} \left(\omega_b - \mu \right)^{\gamma} = 0$$

و مقدر المعادلة بالنسبة لـ θ^{Υ} نجيد $\hat{\theta}^{\Upsilon}(\omega) = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_{\nu_k} - \mu)^{\Upsilon}$ وهو مقدر غير متحيز لـ θ^{Υ} .

مثال (٤):

إذا كانت $w=(w_1,\dots,w_n)$ عينة عشوائية مأخوذة من التوزيع $\psi(\theta,\theta)$ فأوجد مقدر المقولية العظمى للمعلة $\psi(\theta,\theta)$.

$$(0,0)=\theta$$
 ب أن: ق($(0,0)=\theta$ ب $(0,0)$ با أن: ق($(0,0)$ با أن: ق($(0,0)$ با أن: ق $(0,0)$

$$\vec{v}(\cdot,\theta) = (7\pi)^{\frac{1}{\gamma}} (\vec{v}_{\gamma}^{-\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} (\vec{v}_{\gamma}^{-\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} (\vec{v}_{\gamma}^{-\theta,1})$$
فإن: ل(س؛ θ)

$$l_{e_{\perp}} U(\omega; \theta) = -\frac{\dot{\upsilon}}{\gamma} l_{e_{\perp}} \gamma_{\pi} - \frac{\dot{\upsilon}}{\gamma} l_{e_{\perp}} \theta^{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \sum_{\nu=1}^{N} (\omega_{\nu} - \theta_{\nu})^{\gamma}$$

$$= -\frac{\dot{\upsilon}}{\gamma} \operatorname{le}_{\perp} \gamma \pi - \frac{\dot{\upsilon}}{\gamma} \operatorname{le}_{\perp} \theta_{\gamma}^{\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma \theta_{\gamma}^{\gamma}} \gamma + \frac{\dot{\upsilon}(\overline{\omega} - \theta_{\gamma})^{\gamma}}{\gamma \theta_{\gamma}^{\gamma}}$$

حيث أن م
$$=-\frac{1}{i}\sum_{v=1}^{n}(v_v-\overline{v_v})^{\top}$$
 القيمة الملاحظة لتباين العينة م .

$$\bullet = \frac{c \cdot \text{le.} \ U(m \cdot \theta)}{c \cdot \theta} = \frac{c \cdot (m - \theta, r)}{c \cdot \theta} = \frac{c}{c \cdot \theta}$$





وبحل جملة المعادلتين نحصل على تقديري المعقولية العظمي:

 $\hat{\theta}$,= (w) = \overline{w} , $\hat{\theta}$, (w) = $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$

$$^{\prime}$$
 $_{\alpha} = (\omega)^{\prime}$ $_{\alpha}$ $\hat{\theta}$ $_{\alpha}$ $_{\alpha}$ $\hat{\theta}$ $_{\alpha}$ $_{\alpha}$ $(\omega) = 0$

إن المقدر \overline{w} ل θ ، غير متحيز بينما الإحصاء \overline{a} مقدر \overline{b} وبالتالي فإن مقدر المعقولية العظمى لـ θ موجود ووحيد $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_1') = (\overline{w}_1, \overline{a}_1')$ وهسذا المقدد حالبه في الإحسصاء الكافي $\overline{v} = (\overline{v}_1, \overline{v}_1')$ ، حيث أن $\overline{v}_1 = \overline{w}$ $\overline{v}_2 = \overline{w}$ ($\overline{w}_2 = \overline{w}$)

هكذا، فمقدر المعقولية العظمى لدائة $\tau(\theta)$ يمكن أن يكون متحيزاً، أي ليس بالضرورة أن يكون مقدر المعقولية العظمى غير متحيز.

مثال (٥):

بفرض $m=(m_1,...,m_0)$ عينة عشوائية من التوزيع المنتظم ح $(\cdot,0)$ فأوجد مقدر المعقولية العظمي للمعلمة 0.

$$\theta \geq \omega > 0$$
 بن $\leq \theta$

فيمكن كتابتها على النحو الآتي:

ق
$$(\omega:\theta)=\frac{1}{\theta}$$
 القصى قيمة سي θ

وبالتالي فدالة المعقولية:





$$\bigcup_{(\omega)} \omega \in \theta \qquad \qquad \forall \qquad \frac{1}{\omega_{\theta}} = (\theta, \omega) \cup (\omega)$$

ويعني هذا أن دالة المعقولية ل متناقضة تماماً في θ . وبما أن θ لا يمكن أن تكون أصغر من $m_{(0)}$ ، فإن $m_{(0)}$ بلغ نهايتها العظمى عندما $m_{(0)}$ وبالتالي فمقدر المعقولية العظمى لـ $m_{(0)}$ هـ $m_{(0)}$ ومن ثم مشتقها عند المعقولية ل $m_{(0)}$ ، ومن ثم مشتقها عند هذه النقطة غير موجود، أي أن التقدير للمعقولية العظمى لا يعتبر حلاً للمعادلة المعقولية:

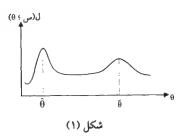
$$\frac{c \, \log_{2} \, U(m^{2} \theta)}{c \theta} = 0$$

وهذه صفة مميزة للحالات التي لا يكون فيها فضاء العينة ك يعتمد على معلمة لذا في مثل هذه الحالات بجب الحيطة وإتباع طرق أخرى (غير حل معادلة أو معادلات المعقولية) للحصول على مقدر المعقولية العظمى، وسنتطرق لبعض هذه الطرق لاحقاً.

ولإيضاح تلك الميزة بيانياً، نفترض أن دالة المعقولية ل(m ؛ θ) يمكن تمثيلها بيانياً كما هو مبنية على الشكل (1)، حيث تعطي طريقة الاشتقاق النقطة θ بينما التقدير المطلوب (التقدير الذي يجعل دالة المعقولية ل(m ؛ θ) تبلغ نهاية عظمى عنده هو $\hat{\theta}$.







مثال (٦):

إذا كانت $m = (m_1, ..., m_0)$ عينة عشوائية من مجتمع توزيعه ح $(\beta : \alpha)$ فأوجد مقدر المعقولية العظمي للمعلمة $\theta(\beta : \alpha)$.

$$\beta > \omega > \alpha$$
 : $(\alpha - \beta) / 1$
 $\beta \leq \omega > \alpha$: $(\alpha - \beta) / 1$
 $\beta \leq \omega > \alpha \geq \omega$: $(\alpha - \beta) / 1$

فإن:

$$\dot{\upsilon}$$
 ن . $(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) / (\alpha + \beta)$ ن . $(\alpha + \beta) = (\beta + \beta) / (\alpha + \beta)$

وباشتقاق ل جزائياً بالنسبة لكل من $\beta \cdot \alpha$ والمساواة بالصغر نحصل على معادلتين، وبحلهما نجد أحد المعلمتين $\beta \cdot \alpha$ على الأقل غير محدود، وهذه النتيجة (الحل) غير مقبولة (غير منطقة)، أي تحقق طريقة الاشتقاق في إعطاء التقدير المطلوب. لكن نلاحظ بوضوح من صيغة دالة المعقولية ل(س θ) أنها تبلغ أكبر قيمة لها عندما يكون الفرق $(\alpha - \beta)$ أصغر ما يمكن، وهذا يتحقق عندما





 $(0,0)^{-1} = (0,0)^{-1} = (0,0)^{-1}$ وبالتالي مقدر المعقولية العظمى: $\hat{\theta}(0,0) = (0,0)^{-1} = (0,0)^{-1}$ مثال (۷):

إذا كانت س=(س،،...سن) عينة عشوائية من توزيع:

$$\beta + \alpha \geq \omega \geq \beta - \alpha \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{\beta Y} = (\beta \cdot \alpha \cdot \omega) \hat{\mathbf{o}}$$

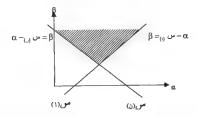
 $(\beta \cdot \alpha) = \theta$ المعلمة العظمى للمعلمة المعلمة فأوجد مقدر المعقولية العظمى

يا أن:

$$0 \cdot \dots \cdot 1 = \mathbf{c} \cdot \beta + \alpha \geq_{\mathbf{c}} \omega \geq \beta - \alpha \cdot \frac{1}{\sigma(\beta Y)} = (\theta \cdot \omega) \mathbf{d}$$

$$\text{ن... ()} = (0 + \alpha \ge_{(0)} \dots \ge_{(0)} \dots \ge \beta - \alpha + \frac{1}{(\beta \tau)} = (0 + \alpha)$$

ولايجاد مقدر المعقولية العظمى نستخدم الطريقة البيانية، كما همي مبنية على الشكل (٢).







نلاحظ أن دالة المعقولية ل(س ؛ θ) تساوي $(\beta \Upsilon/1)^{0}$ في المنطقة المظللة على الشكل (Υ) ، وأن أكبر قيمة ممكنة لها عندما تكون β أصغر ما يمكن، وتكون β أصغر ما يمكن، عند تقاطع الخطين:

$$\alpha - (\omega) \omega^{\alpha} = \beta$$
 $(\omega) \omega^{\alpha} - \alpha = \beta$

وبالتالي بحلهما المشترك نجد:

$$\frac{(0) \cdot \mathcal{U}^{\omega} - (0) \cdot \mathcal{U}^{\omega}}{Y} = \hat{\beta} \qquad \qquad \frac{(0) \cdot \mathcal{U}^{\omega} + (0) \cdot \mathcal{U}^{\omega}}{Y} = \hat{\alpha}$$

ومن ثم فإن مقدر المعقولية العظمى لـ $\theta = (\beta, \alpha)$ هو:

$$\frac{(1) \stackrel{\mathcal{U}^{\omega}}{-} (\omega) \stackrel{\mathcal{U}^{\omega}}{-} (\omega) \stackrel{\mathcal{U}^{\omega}}{-} (\omega) \hat{\beta} \qquad \frac{(\omega) \stackrel{\mathcal{U}^{\omega}}{-} + (1) \stackrel{\mathcal{U}^{\omega}}{-} (\omega) \hat{\alpha}}{+} = (\omega^{\omega}) \hat{\alpha} \qquad {}^{\mathfrak{g}} (\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha}) = (\omega^{\omega}) \hat{\theta}$$

مثال (٨):

$$(\theta - (1) \omega) = (0 + 1 - \omega (1)) = (0 + \omega (1))$$

ونلاحظ بموضوح من هذه الصغية أن ل(س ؛ θ) تأخذ أكبر قيمة ممكنة لها عندما تكون:

$$\theta + \ell \geq \omega_{(\iota)} \qquad \Longleftrightarrow \begin{cases} \ell & \text{if } \ell \leq \ell \leq \omega_{(\ell)} \\ \theta \leq \omega_{(\ell)} \end{cases}$$





وعلى ذلك فإن تقدير المعقولية العظمى ليس وحيداً، حيث أن أية قيمة: $\hat{\theta}(\omega) \in [m_{(\omega)}^{-1} + m_{(v)}^{-1}]$ هي تقدير المعلقولية العظمى. فمثلاً، كمقدر معقولية عظمى يمكن أخذ: $\hat{\theta}(\omega) = \frac{m_{(v)} + m_{(\omega)} - 1}{v}$

وفي هذه الحالة $\hat{\theta}$ (س) دالة في الإحصاء الكافي ت= ($\omega_{(1)}$). ونخلص من هذا المثال إلى أن مقدر المعقولية العظمى لمعلمة θ ليس بالمضرورة وحيداً.

مثال (٩):

نموذج طبيعي متعدد الأبعاد، تقدير المعقولية العظمى لمعالمة.

لنفرض أن المتغير العشوائي الملاحظ ζ متعدد الأبعاد (ك بعد مثلاً) يخضع للتوزيع الطبيعي ن(χ χ)، حيث أن χ (χ χ) حيث أن χ (χ) معمووة العزوم المركزية من المرتبة الثانية، إن عدد المعالم عند المعلومة (آخذين بالاعتبار تناظر المصفوفة χ) يساوي χ + χ (χ) χ .

إذا كانت س=(س،،...س،) عينة عشوائية مـأخوذة مـن التوزيـع Δ(ζ)، فالمطلوب إيجاد تقديرات المعقولية العظمى لمعالم هذا التوزيع:

$$\tilde{\mathfrak{o}}(\omega_{v_{0}}^{-1}) = \frac{1}{|\Sigma|^{d} (\pi \gamma)^{1/2}} = \tilde{\mathfrak{o}}(\omega_{v_{0}}^{-1} - \mu)^{1/2} = 0$$





فإن:

$$\sum_{\mu,\nu} \tilde{\mathcal{E}}(\omega_{\nu},\theta) = (\tau \tau)^{\frac{\nu}{\nu}} \left[\sum_{\nu} \left[\frac{\nu}{\tau} \right]^{\nu} \cdot \sum_{\nu} (\omega_{\nu} - \mu)^{\nu} \cdot \sum_{\nu} (\omega_{\nu} - \mu) \right] \dots . (6)$$

$$(\mu - \overline{\psi})^{-} Z'(\mu - \overline{\psi})^{-}$$
لنرمز بـ $\overline{\psi} = (\psi_{\nu} - \psi_{\nu})^{-}$ ن، عندها: $\Sigma_{m, \nu}$

$$(\mu - \overline{\omega})^{-} \underline{Z}'(\mu - \overline{\omega}) + (\overline{\omega}_{-}, \omega)^{-} \underline{Z}(\overline{\omega}_{-}, \omega) \underline{\breve{Z}} =$$

إذا رمزنا بـ $\hat{\Sigma}(m)$ لمصفوفة العزوم من المرتبة الثانية للعينة، فإن:

$$\hat{\Sigma}(w) = \frac{1}{v} \sum_{v=1}^{w} (w_v - \overline{w}) (w_v - \overline{w})^{-1} = ||w_{v,v}||^{\frac{w}{v}}$$

حيث أن عُور العزم المركزي من المرتبة الثانية للعنية ويحسب من العلاقة:

$$\hat{2}_{v_{c}} = \frac{1}{\dot{c}} \sum_{i=1}^{N} (w_{i,v_{c}} - \overline{w_{v_{c}}}) (w_{i,v_{c}} - \overline{w_{c}})$$

ail
$$w_1 = (w_0)_1 \dots (w_0)_2$$
 $0 \dots (w_0)_3$ $0 \dots (w_0)_3$ $0 \dots (w_0)_3$

وباســـتخدام المـــساواة ص^ن ب ص = زر (ب ص*)، ص* = ص^نص والمؤثر الخطي زر نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i - \overline{m})^i \sum_{i=1}^{n} (m_i - \overline{m}) = i \cup (i \sum_{i=1}^{n} \hat{\Sigma}(m))$$

وبناءُ على المساواتين (٦) و(٧) يمكن كتابة دالة المعقولية ل(س ؛ θ) علمى الصورة

$$\frac{\pi^{\frac{d}{\tau}}}{\tau}$$
 $(\pi^{\tau}) = (\theta$ ائس





$$\ddot{a}_{0}$$
تغریب $[-\frac{\dot{\upsilon}}{\gamma}(\overline{\omega}-\mu)^{2}\Sigma^{-1}(\overline{\omega}-\mu)-\frac{\dot{\upsilon}}{\gamma}$ زد $\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}(\omega)-\frac{\dot{\upsilon}}{\gamma}$ لو را Σ ا

نلاحظ أن أكبر قيمة ممكنة لدالة المعقولية ل بالنسبة لـθ توافق أصغر قيمة ممكنة للدالة:

$$\psi(\omega,\mu,\Sigma) = (\overline{\omega} - \mu)^{\nu} \sum_{i} (\overline{\omega} - \mu) + [(\nu,\Sigma^{-i})^{2} \hat{\Sigma}(\omega) - E - (\nu,\Sigma^{-i})^{2} \hat{\Sigma}(\omega)]$$

بالنسبة لـ \mathbb{Z} ، μ . (إدخال الشابتين ك و لـومـ $\|\hat{\chi}\|$ مـن أجـل تبسيط الصباغات اللاحقة).

إذا رمزنا ب ٨٠٠٠٠٠٨ لجذور المعادلة المميزة:

$$\left| \sum_{i} \hat{\Sigma}(\omega) - \lambda e_{i} \right| = \int_{\mathbb{R}^{n}} \left| \hat{\Sigma}(\omega) - \lambda \Sigma \right| = 0$$

فإن:

$$(\iota \sum^{-1} \hat{\Sigma}(w) - b - k_{a} | \Sigma^{-1} \hat{\Sigma}(w) | = \lambda_{+} + \dots + \lambda_{a} - b - k_{a} (\lambda_{+} + \dots + \lambda_{b})$$
 $\Rightarrow i \text{ it } \sum^{-1} \text{ مصفوفة محددة وموجبة و $4 \geq 0$ $0 \leq 0 \leq 1$ لوم $4 \geq 0$ ، فإن:

 $w(w) \text{ then } \Sigma > 0$$

وتتحقق المساواة فقط عنـدما $\mu=\overline{w}$ و $\lambda=\lambda=....=\lambda_n=1$ أي عنـدما $\mu=\overline{w}$ و $\Sigma=\hat{\Sigma}(w)$ ، وبالتالي فإن مقدري المعقولية العظمى لـ μ و $\Sigma=\|\delta_{w}$ $\|\delta_{w}\|^{2}$ هما على الترتيب \overline{w} و $\hat{\Sigma}(w)=\|\delta_{w}\|^{2}$.

يتمتع مقدر المعقولية العظمى لمعلمة θ، ببعض الخواص الهامة، والتي سنذكرها بصيغة مبرهنات.





مرهنة (١):

لتكن $w=(w_1,...,w_n)$ عينة عشوائية من مجتمع توزيعه θ ($w=(w_1,w_2,w_n)$) يعتمد على معلمة θ (وحيدة البعد أو متعدد الأبعاد) و θ ($w=(w_1,w_2,w_n)$) العظمى θ

الإثبات:

 θ أن خ = خ(θ) دالة تناظر أحادية في θ (حسب الفرض)، فبإن الدالـة العكسية موجودة وهي θ = θ (خ) عندها:

قيمة قصوى ل
$$(m : \theta)$$
 قيمة قصوى ل $(m : \theta(-d))$ قيمة قصوى ل $\theta(\theta)$

وإذا كانت الدالة ل(س ؛ θ) تبليغ أكبر قيمة ممكنة لها عند النقطة $\hat{\theta} = \hat{\theta}$ (س)، فإن الدالة. ل(س ؛ θ (خ)) في خ تبلغ أكبر قيمة لها عند النقطة $\hat{\tau}$: $\hat{\theta} = \hat{\theta}$ (س) الحققة للمعادلة $\hat{\theta}$ (خ) = $\hat{\theta}$ أي عند النقطة $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\hat{\theta})$.

تدعى هذه الخاصة لمقدر المعقولية العظمى بخاصة النبات أو صدم الاختلاف.. وتعطي هذه الخاصة امكانية الحصول على مقدرات المعقولية العظمى لأسرة هامة من الدوال المعلمية $\tau(\theta)$ ذات التناظر الآحادي في θ . وهذا ما سنوضحه من خلال الأمثلة الآتية.





مثال (۱۰):

إذا كانت س=(س،،،،،سن) عينة عشوائية من مجتمع كثافة توزيعه الاحتمالي:

$$1 : \bullet = (0 \cdot 1)^{-1}(\theta - 1) \cdot \theta = (\theta \cdot 1)^{-1}$$

$$\frac{\theta^{\tau}}{\theta+1} = (\theta)^{\tau}$$
 للدالة العقولية العظمى للدالة

نبحث أولاً عن مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ:

$$(-1)^{\alpha}$$
 $(1-\theta)^{\alpha}$ $(1-\theta)^{\alpha}$

$$(\theta - 1) = 0$$
 $\overline{0}$ $\theta + (1 - \overline{0})$ $\theta = 0$

$$\frac{c}{c} \frac{b_{ca}}{b} = \frac{c_{ca}}{\theta} - \frac{c_{ca}}{\theta} = \frac{c_{ca}}{\theta} = \frac{c_{ca}}{\theta} = \frac{c_{ca}}{\theta}$$

$$\overline{w} = (w)\hat{\theta}$$
 ومنها

يا أن
$$\frac{\theta Y}{\theta + 1}$$
 دالة تناظر أحاديـة في θ ، وبمــا ســبق ســتجد أن مقــدر

المعقولية العظمى ل
$$\tau(\theta)$$
هو: $\hat{\mathbb{D}} = \tau(\theta) = \frac{\gamma_{w}}{1 + w}$

مثال (۱۱):

إذا كانت لدينا معطيات المثال (١)، فأوجد المعقولية العظمى لكل من الدوال المعلمية الآتية:

$$\tau_{r}(\theta) = \frac{r}{\theta}, \quad \tau_{r}(\theta) = \frac{l_{e_{r}}\theta}{\theta} + r, \quad \tau_{r}(\theta) = \frac{l_{e_{r}}\theta}{\theta}$$





يما أن مقدر المعقولية للمعلمة θ هـو $\hat{\theta}(m) = \frac{1}{m} e \Delta d$ مـن الـدوال المعلمية $\tau \cdot \tau \cdot \tau \cdot \tau$ ذات تناظر أحادي في θ ، فحسب المبرهنة (۱) فهد:

$$\hat{\mathbb{E}}_{r} = \tau_{r}(\hat{\theta}) = \overline{u}, \hat{\mathbb{E}}_{r} = \tau_{r}(\hat{\theta}) = \underbrace{u}_{r} + 1 \hat{\mathbb{E}}_{r} = \tau_{r}(\hat{\theta}) = \overline{u}, \underbrace{u}_{r} = \frac{1}{2}$$

مبرهنة (٢):

إذا كانت $m=(m_1,\dots,m_0)$ عينة عشوائية من مجتمع توزيعه ق (m) . وكان هناك إحصاء كافي للمعلمة θ ، فن مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ يكون دالة في هذا الإحصاء الكافى.

الإثبات:

أن τ = τ(m) إحصاء كافي للمعلمة θ، ومن ثم يمكن كتابة دالة المعقولية على الصورة:

وعلى ذلك:

لود ل(س ؛ ١٩) = لود ك(ت؛ ١٩) + لود هـ (س)

$$(\theta_{\perp} \cup (\theta_{\perp})) = \frac{c \quad d_{\perp} \cup (\theta_{\perp})}{c\theta} = \frac{c \quad d_{\perp} \cup (\theta_{\perp})}{c\theta}$$

 $\Psi = \Psi \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ لإيجاد مقدر المعقولية العظى نضع: ج

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ 6 نجد:

$$\hat{\theta}$$
(س) = φ (ت).





مبرهنة (٣):

إذا وجد المقدر الأمشل للمعلمة θ في توزيع ق(س ؛ θ)، فإنه مقدر المعقولية العظمي لهذه المعلمة.

الإثبات:

لكن $m=(m_1,...,m_0)$ عينة عشوائية من مجتمع توزيعه $\mathfrak{g}(m, \theta)$ ولنفرض أن $\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}^*(m)$ المقدر الأمثل لتقدير المعلمة θ .

عا أن ت المقدر الأمثل للمعلمة θ، فإن:

$$e_{\theta} \stackrel{\circ}{=} e \theta$$
 , $e_{\theta} \stackrel{\circ}{=} e \frac{1}{\psi_{0}(\theta)}$

وبالتالي حسب علاقات سابقة نجد:

$$3(\omega^{\frac{1}{2}}\theta) = \frac{1}{2} \frac{\log_{\omega} U(\omega^{\frac{1}{2}}\theta)}{\theta} = \frac{1}{2} \frac{\log_{\omega} U(\omega^{\frac{1}{2}}\theta)}{\log_{\omega} U(\omega^{\frac{1}{2}}\theta)} = \frac{1}{2} \log_{\omega} U(\omega^{\frac{1}{2}}\theta)$$

بوضع: $\frac{1}{(0)}(0^{-1}-\theta)=0$ وبحلها بالنسبة لـ نجد أن: $\hat{\theta}(m)=0^{-1}$.

مثال (۱۲):

إذا كانت س= (m_1, \dots, m_n) عينة عشوائية من التوزيع $L(\zeta)$ و $U(\theta_1, \theta_2)$ و أوجد مقدر المعقولية العظمى للدالة:

$$\tau(\theta) = \phi\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\theta\right) = \theta(\theta) + \frac{1}{2}\theta = \theta(\theta) + \frac{1}{$$

المثلة للاحتمال ح و (١ < س).



 \mathbf{a} يمكن في هذه الحالة وضع $\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{r}(\hat{\mathbf{\theta}}),\hat{\mathbf{\theta}}_{\tau})$ ، وهي دالة تناظر أحادية في $\mathbf{\theta} = (\mathbf{\theta}_{\tau},\mathbf{\theta}_{\tau})$ وبالتالي حسب المبرهنة (۱) فتقدير المعقوليه العظمى لـ خ $\hat{\mathbf{\theta}}_{\tau}$ يكون: $\hat{\mathbf{a}}_{\tau} = (\mathbf{r}(\hat{\mathbf{\theta}}),\hat{\mathbf{\theta}}_{\tau})$ لكن كما نعلم المعقولية العظمى لكل $\mathbf{\theta}_{\tau},\mathbf{\theta}_{\tau}$ من هو $\overline{\mathbf{w}}_{\tau}$ ، م على الترتيب، إذن:

$$(\mu(\frac{\overline{\omega_{n}}-\mu_{n}\omega_{n}}{2})\varphi)=\hat{\zeta}$$

اي أن تقدير المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta)$ هو: $\hat{\tau}=\tau(\hat{\theta})=\phi(\frac{m_0-m_0}{r})$

ومن ثم فمقدر المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta)$:

$$(\frac{\overline{\omega} - \omega}{2})\phi = (\omega)\hat{\tau}$$

مثال (۱۳):

إذا كانت س=(س،،...س،) عينة عشوائية من التوزيع الطبيعي ثنائي العبد ن(٠٠ ∑)، حيث أن:

$$\bullet = (\bullet, \bullet), \quad \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

و δ '>· ، ا ا ا<۱ مجهولين:

إن L(س) و ن(٦٠٠) ؛ ي = ١،....،ن أي مستغير عسشوائي ذو بعسدين كثافة توزعيه الاحتمالية:





$$\Box(\omega \ : \ \omega \ : \theta) = \frac{1}{\tau \tau} \ \overline{acc} \underbrace{\frac{-\omega^{\tau} + \omega^{\tau}}{\tau \delta^{\tau}(t - 1^{\tau})}}_{\tau} + \frac{\frac{1}{\tau}(\omega + \omega)}{\delta^{\tau}(t - 1^{\tau})} - \frac{1}{\tau} \underbrace{bc_{\star} [\delta^{\tau}(t - 1^{\tau})]}_{\tau} + \frac{1}{\tau} \underbrace{bc_{\star} [\delta^{\tau}(t - 1^{\tau})]}_{\tau}$$

تلاحظ هنا أن صيغة دالة المعقولية معقدة وهي تعتمد على معلمتين $P(\hat{\delta})$ من المفيد $\hat{\delta}$ وبالتالي لتبسيط عملية إيجاد تقديري المعقولية العظمى $\hat{\delta}$ من المفيد الانتقال إلى معلمة جديدة خ = $(\dot{\tau}_1,\dot{\tau}_2)$ بدلاً من $\theta=(\hat{\delta}^*,\hat{\delta})$, بوضع:

(1)
$$\frac{1}{\zeta_{1}} = \dot{\zeta}_{1}(\theta) = -\frac{1}{\delta \gamma} \frac{1}{(\gamma_{1} - \gamma_{1})^{\gamma} \delta \gamma_{2}} = \dot{\zeta}_{1}(\theta)$$

$$\dot{\zeta}_{2} = \dot{\zeta}_{1}(\theta) = \frac{\rho}{\delta \gamma_{1}(\gamma_{1} - \gamma_{2})^{\gamma} \delta} = \dot{\zeta}_{2}(\theta)$$

وعندئذ يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية على الصورة: ق(س، ص؛ θ)=

وعلى ذلك يمكن بسهولة إيجاد معادلتي المعقولية لتقدير خ١ خ٠ وهما:

$$\frac{1}{\dot{\upsilon}}\sum_{\nu=1}^{2}\left(\omega_{\nu}^{2}+\omega_{\nu}^{2}\right)-\frac{2\tau(\dot{\varsigma})}{\dot{\varsigma}}=-\frac{3\dot{\varsigma},}{3\dot{\varsigma},-\dot{\varsigma}^{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{N} \omega_{ij} = \frac{-2\tau(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac$$

لكن من العلاقتين في (١) نجد:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{\dot{\zeta}^{*}}{\dot{\zeta}} = \frac{1}{2}\delta \quad \hat{\delta} \quad \frac{1}{2}\frac{\dot{\zeta}^{*}}{\dot{\zeta}} = \rho$$





وبالتالي من العلاقتين في (٢) نحصل على تقدير المعقولية العظمى:

$$\hat{\delta}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{V_{\mathsf{U}}} \overset{\sim}{\overset{\sim}{\mathbb{Z}}}_{\mathsf{U}} (\mathsf{U}_{\mathsf{U}}^{\mathsf{T}} + \mathsf{d}_{\mathsf{U}}^{\mathsf{T}}) \qquad \hat{\rho} = \mathsf{T} \overset{\sim}{\overset{\sim}{\mathbb{Z}}}_{\mathsf{U}} \mathsf{u}_{\mathsf{U}} \mathsf{d}_{\mathsf{U}} \overset{\sim}{\overset{\sim}{\mathbb{Z}}}_{\mathsf{U}} (\mathsf{U}_{\mathsf{U}}^{\mathsf{T}} + \mathsf{d}_{\mathsf{U}}^{\mathsf{T}})$$

حيث أن (سي، صي) القيمة الملاحظة لـ سي؛ ي = ١،....، ن

* طريقة التراكم لحساب تقدير المعقولية العظمى بالتقريب:

لا يتاح دائماً الحصول على تقديرات المعقولية العظمى بصورة صريحة عددة. في مثل تلك الحالات نلجاً إلى طريقة التقريب العددية لحل معادلة أو معادلات المعقولية (عندما يمكن صياغة مثل تلك المعادلات). أي الحصول على تقدير المعقولية العظمى بالتقريب وإحدى طرق التقريب هذه تدعى بطريقة التراكم، التي قدمت من قبل العالم فيشر، وتتمثل بما يلى:

لتكن θ معلمة حقيقية ودالة المعقولية ل $(\omega;\theta)$ قابلة للاشتقاق مرتين بالنسبة لـ θ . ننشر حالة المساهمة ع $(\theta) = a$ $(\omega;\theta)$ وفق متسلسلة تيلور في جوار النقطة θ . المتخذة كتقريب ابتدائي لـ $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\omega)$ ونحسب هـذا المنشور عند $\theta = \hat{\theta}$ عندند، بما أن ع $(\hat{\theta}) = a$ فإن:

$$\mathbf{g}(\theta,\mathbf{0},\mathbf{0}) + (\hat{\theta}-\theta_{\parallel})$$
 عَ (θ^*) حیث θ^* نقطة ما بین $\hat{\theta}$ ، θ . وبالتالي:
$$\hat{\theta} = \theta - \left(\frac{\mathbf{g}(\theta,\mathbf{0})}{\mathbf{g}(\theta,\mathbf{0})}\right)$$

$$\theta_{,} = \theta_{,} + \frac{3(\theta_{,})}{\dot{\upsilon}} = 0$$





يمكن تكرار هذه العملية، بأخذ θ، كتقريب ابتدائي جديد، وهكذا فالتقريب (ك + ١) وفق طريقة التراكم يحسب وفق العلاقة:

$$\theta_{b+1} = \theta_b + \frac{g(\theta_b)}{\psi \dot{\varphi}(\theta_b)} + \frac{d}{d\theta_b}$$

تستمر عملية التكرار حتى بلوغ الدقة المطلوبة: $|\theta_{\rm m,n}-\theta_{\rm m}|<3$ (١٢)

إن اختيار النقطة الأولية θ . يعتبر هاماً. وعادةً يتم أخذ قيمة ما بحيث تسهل حساب تقدير مستق للمعلمة θ ، عندها النقاط الثلاث θ .، θ ° $\hat{\theta}$ ، في حالة عينة كبيرة الحجم ن، تقع قريبة من القيمة الحقيقية للمعلمة الجهولة. وفي حالات عدة يمكن استخدام تقديرات طريقة العزوم، التي سنتطرق لها لاحقاً، كنقطة أولية θ .

تجدر الإشارة إلى أن طريقة التراكم بشكل عام تــؤدي إلى الهــدف وبــشكل سريع، مع أنها في بعض الحالات لا تنتهي.

مثال (١٤):

(نموذج كوشي تقدير المعلمة بطريقة التراكم).

لتكن س = (س، ،...، سن) عينة من توزيع كوشي ك (θ) ، إن دالة المساهمة:

$$3(\theta) = 7 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\left(w_v - \theta\right)}{1 + \left(w_v - \theta\right)^T}$$

إن الحصول على حل دقيق لمعادلة المعقولية ع(θ) = • غير ممكن. وبمـــا أن دالة المعلومات مــن أجــل نمــوذج كوشـــي تــساوي ٢/١، فالمتتاليــة (١٢) تأخـــذ الشكل.





 $\theta_{b+1} = \theta_b + (Y \setminus \dot{\psi}) g(\theta_b)$, t = 0 , t = 0

وكتقريب ابتدائي يمكن أخذ θ . تساوي وسيط العينة $\overline{\omega}$ ، الذي يتقارب بالاحتمال، عندما ن $\longrightarrow \infty$ من القيمة الحقيقية للمعلمة θ ، التي تعتبر في الحالة المفروضة الوسيط النظري (وسيط المجتمع $\overline{\mu}$).

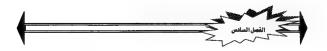
* الخواص التقاربية لقدر المعقولية العظمى:

إن طريقة المعقولية العظمى لا تعطي دوماً مقدر غير متحيز. فمثلاً، نجد في المثال (٤)، ان التباين للعينة م (س) هو مقدر المعقولية العظمى للتباين θ , في النموذج ن (θ , θ , θ)، وهذا المقدر متحيز. إلا أن مقدار التحيز θ , θ أي أن θ , نتناقص بازدياد حجم العينة، وينتهي إلى الصفر عندما ن θ أي أن مقدر المعقولية العظمى يصبح غير متحيز. تدعى المقدرات المتحيزة التي تتمتع عميل هذه الخاصة بغير المتحيزة تقاربياً أو غير المتحيزة بالتقارب.

إن خاصة تلك المقدرات المرتبطة بعدم التحيز تتحسن بازدياد حجم العينة. وهذه الحالة لها طبيعة عامة إلى حد ما. ويسكل خاص إن أهم خاصة لمقدرات المعقولية العظمى تتمثل في أنها لها طبيعة تقاربية، أي صحيحة من أجل عينات كبيرة. لذا فإن الاستخدام الواسع لمقدرات المعقولية العظمى مرتبط أساساً بخواصها التقاربية. إن عرض مبرهنات التقارب لمقدرات المعقولية العظمى تشكل عتوى هذه الفقرة، وللإشارة إلى ارتباط المقدرات حجم العينة منشير إليها بالدليل ن.

عند التكلم عن الخواص التقاربية للمقدرات (أو الخواص من أجل عينات كبيرة)، فقبل كل شيء نهتم باتساقها وبعبارة أخرى، وبالتقارب





بالاحتمال للمقدرات المفروضة من المعيزات النظرية المرافقة لها، لأنه كما بينا في الفصل الثالث، أن غالبية مميزات العينة (عزوم العينة، القيم الحرجة، قيمة دالة التوزيع التجربيي في كل نقطة،الخ) تتقارب بالإحتمال من المعيزات النظرية الموافقة لها، عندما ن → ∞، وبالتالي تعتبر مقدرات متسقة لنقدم الآن التعريف الدقيق للاتساق.

لــــتكن س = (س، ،...، سن) عينـــة عـــشوائية مـــن التوزيـــع $L(0) \in \mathfrak{d}(0)$ و $L(0) \in \mathfrak{d}(0)$ و $L(0) \in \mathfrak{d}(0)$ حيث في الحالة العامة فضاء المعلمة $L(0) \in \mathfrak{d}(0)$ مفتوح من الفضاء L(0)

یدعی، حسب التعریف، المقدر $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0$ (س) من أجل $\mathbf{r}(\theta)$ بالمتسق، إذا حقق الشرط التالي:

$$\theta \ni \theta \forall \theta \in (\theta)$$

أي أنه مهما تكن القيمة الحقيقية للمعلمة θ من فضاء المعلمة θ ، فإن σ_0 يتقارب احتمالياً (بالنسبة للتوزيع σ_0) من القيمة الحقيقية للدالة المقدرة σ_0).

إن خاصة الاتساق ضرورة من أجل أي قاعدة تقـدير، إلا أنهـا في حقيقـة الأمر، تعتبر خاصة تقاربية ومستقلة عن خواص المقدر عند ثبــات حجــم العينــة (خلافاً لخاصتي عدم التحيز والكفاءة) لنرى الأن المعيار الهام والبسيط للاتساق.

مبرهنة (٤):

$$\delta = 3$$
 ف θ ت $\delta = 3$ ف θ الإذا كان و θ ت $\delta = 3$



$$\mathbf{3}_{6}=\mathbf{3}_{6}\left(\theta\right)\longrightarrow\bullet$$
, $\mathbf{3}_{6}\left(\theta\right)\longrightarrow\bullet$ $\mathbf{4}$ \forall $\theta\in\theta$

 (θ) ء فإن تن مقدر متسق للدالة ع

الإثبات:

يا أن:

$$|\tau_{-}|_{\tau_{-}} = |\tau_{-}|_{\tau_{-}} = |\tau_{-}|_{\tau$$

والحــــــــادث {|ت ر-٦|≥ع} محتـــــــوى في الحــــــــادث |ات ر- وهات را≥ع-اع را} فحسب متباينة تشييشف نجد:

$$\frac{\delta_{0}}{\tau(|_{0}\mathcal{E}|-\tau)} \geq (|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal{E}|-|_{0}\mathcal$$

وعندما ن $\longrightarrow \infty$ مهما تکن $\theta \in \theta$.

نورد فيما يلي بعض الخواص لتقارب دوال في متغيرات عشوائية، المفيــدة لاحقاً.

ا . إذا كان η \longrightarrow η و ϕ دالـة مستمرة، فـإن: $\phi(\eta_{_{\parallel}})$ \longrightarrow $\phi(\eta)$ وأيـضاً $\psi(\eta)$

 لـتكن ن = ١، ٢،، (η، ٥٦) متنالية أزواج مـن المـتغيرات العـشوائية، عندئذ:





$$(\zeta)L\longleftarrow (_{_{0}}\eta)L \longleftarrow (\zeta)L\longleftarrow (_{_{0}}\zeta)L , \cdots \longleftarrow _{_{0}}\zeta -_{_{0}}\eta . Y$$

$$\cdot \leftarrow \stackrel{\epsilon}{\smile} _{\cup} \zeta_{\cup} \eta \iff \stackrel{\epsilon}{\smile} _{\cup} \zeta_{\circ} (\eta) L \Leftarrow (_{\cup} \eta) L . \Upsilon$$

$$(\Rightarrow + \eta)L \leftarrow (\ _{\cup}\zeta +_{\cup}\eta)L \Longleftrightarrow \Rightarrow \leftarrow \ _{\cup}\zeta \cdot (\eta)L \Leftarrow (\ _{\cup}\eta)L \cdot \xi$$

$$\cdot \leftarrow (\ \zeta) \varphi - (\ \eta) \varphi \Leftarrow (\zeta) L \leftarrow (\ \zeta) L \ \cdot \leftarrow \zeta + \eta \ .$$

حيث φ دالة مستمرة، نترك برهان هذه الخصائص البسيطة للقارئ على مسيل المثال.

۳. إذا كانت س = $(m_1, ..., m_0)$ و $m_0 = m_0(m_0)$ مقدر المعلمة وحيدة البعد θ في النموذج $\theta \in \theta$ ؛ $\mathfrak{G}(m, \theta)$ ، بحيث أن:

عندما ن $\longrightarrow \infty$ ، وإذا كانت الدالة ϕ قابلة للاشتقاق و $\dot{\phi} \neq \dot{\phi}$ ، فإن:

$$L_{\theta}\left(\sqrt{i_{\tilde{G}}}(\phi(\tilde{G}_{\tilde{G}})-\phi(\theta))\right)\longrightarrow \tilde{G}(\theta(\tilde{G}_{\tilde{G}}))^{*}\delta^{*}[\theta(\tilde{G}_{\tilde{G}})]$$

بالإضافة لذلك إذا كانت الدالة φ مستمرة فإن

(12).....(
$$(\theta)^{r}\sigma \cdot \cdot)$$
 $\hookrightarrow \leftarrow (\ \Box \circ) \circ / (\theta) \circ - (\ \Box \circ) \circ) \cup b$

وإذا كان δ(θ) مستمراً فإن:

$$(10)....(10) \longleftrightarrow \left(\frac{(\theta)\phi - (\Box \dot{\varphi})\phi}{(\Box \dot{\varphi})\delta(\Box \dot{\varphi})}\right)_{L}L$$





يعتمد الإثبات على منشور تيلور:

 $\phi(\tilde{c}_{_{\mathbb{C}}}) - \phi(\theta) = (\tilde{c}_{_{\mathbb{C}}} - \theta) (\tilde{\phi}) (\tilde{\phi}) + \zeta_{_{\mathbb{C}}})$ حيث عندما $\phi(\tilde{c}_{_{\mathbb{C}}}) - \phi(\tilde{c}_{_{\mathbb{C}}}) = \delta = \delta$ (3) فإن: $|\zeta_{_{\mathbb{C}}}| = \delta = \delta$ عن من ذلك:

لكن الطرف الأعمان حسب الفرض، ينتهي إلى ١ عندما ن → ∞ وبالتالي كر _ ٤٠٠٠٠ وبناءً على الخاصة [(٣) من ٢]:

وهــذا يعــني حــسب الخاصــة [(۲) مــن ۲] أن المــتغير العــشوائي $\sqrt{G}(\phi(-) - \phi(\theta))$ له أيضاً نفس التوزيع المقارب، كمــا للمـتغير العـشوائي $\sqrt{G}(-) - \phi(\theta)$ أي التوزيع الطبيعي ن $(-) - \phi(\theta)$ $\delta'(\theta)$ وهذا ما تؤكده العلاقة (۱۳). وإذا كانت Φ مستمرة، فحسب الخاصة (۱):

$$(\theta)\tilde{\phi} \leftarrow \tilde{\phi}(\tilde{\Box})\tilde{\phi}$$

ومن ذلك وما سبق وحسب الخاصة [(٤) من ٢] محصل على العلاقة (١٤) وبإجراء مناقشة مشابهة يمكن إثبات صبحة الصيغة (١٥) ، تقدم بدون إثبات تعميماً للخاصة ٣ على حالة معلمة متجه $\theta = (\theta_1,, \theta_r)$

3. ليكن $r=(r_{10}, ..., r_{10})$ مقيدًراً للمعلمية θ ، المحقق لليشرط $J_{0}(r_{10}, \mu) \longrightarrow 0$ $(r_{10}, \mu) \longrightarrow 0$ ومهما تكن . عندئد $\theta \in \theta$. عندئذ من أجل أي دالة ϕ في ر متغير وقابلة للاشتقاق:

$$() _{\theta} () _{\zeta} () _{\zeta} () _{\zeta}) \longrightarrow ((\mu - \zeta _{\zeta}) _{\zeta} () _{\zeta}) _{\theta} () _{\zeta} ()$$



بف رض $\mathbf{v}(\theta) \times \mathbf{v}$ و بن رون $\mathbf{v}(\theta) \times \mathbf{v}$ بن رون $\mathbf{v}(\theta) = \mathbf{v}(\theta) \times \mathbf{v}$ و بن رون $\frac{\epsilon \phi(\theta)}{\epsilon \theta}$ بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت الدالة ϕ مستمرة وقابلة للاشتقاق وكل عناصر مصفوفة العزوم من المرتبة الثانية $\Sigma(\theta)$ مستمرة بالنسبة لـ θ فإن:

$$J_{\theta}(\sqrt{U}(\phi^{2}) - \phi(\theta))/U(U)) \longrightarrow U(1)$$

لنصيغ الآن الخواص المقارنة الأساسية لمقدرات العظمى. لنفترض أن النموذج $\tilde{g}(m;\theta)$ نظامن، ودالة المعقولية $L_{g}(m;\theta)$ لما نهاية عظمى واجدة بالنسبة $L_{g}(m;\theta)$ من أجل $0 \geq 1$ و $m \in L_{g}(m;\theta)$ أن مقدر المعقولية العظمى موجود $L_{g}(m;\theta)$ عندئذ:

۱. مقدر المعقولية $\hat{\theta}(w)$ للمعلمة θ متسق.

7. إذا كانت الدالة ق (m, θ) قابلة للاشتقاق ثلاث مرات بالنسبة θ وتوجد دالة م(m) مستقلة عن θ ، بحيث أن:

$$\frac{c^{7} \, \mathrm{lo}_{\omega} \, \hat{\upsilon}(\omega^{2}\theta)}{c \, \theta_{\upsilon} \, c \, \theta_{\upsilon} \, c \, \theta_{\upsilon}} \geq \mathsf{q}(\omega_{\upsilon}) < \infty \,$$
ې ې، ر، جه ا، ...، ن

 $\Theta = 0$ ومهما تكن $\Theta \in \Theta$ ، فإن

حيث أن ط(θ) مصفوفة المعلومـات، المعرفـة بالعلاقـة (٦)، والـتي تعتــبر حسب الفــرض نظاميــة، أي غــير شــاذة (|ط(θ)| ≠ ۰) بالإضــافة إلى ذلـك، إذا





كانت الدالة $\tau(\theta)$ مستمر وقابلة للاشتقاق بالنسبة لـ θ و $\hat{\tau}_{-}$ $\hat{\sigma}_{-}$) مقدر المعقولية العظمى لها، فإن:

$$\left(\frac{(\theta)\tau^{2}}{\theta^{2}},\dots,\frac{(\theta)\tau^{2}}{\theta^{2}}\right) = \left(\theta\right) - \left(\theta\right) - \left(\theta\right) - \left(\theta\right) = \left(\theta\right)^{\tau} - \delta$$

هكذا، من أجل صف واسع من النماذج فإن مقدرات المعقولية العظمى متسقة وطبيعية بالتقارب في حالة معلمة θ وحيدة البعد تأخذ العلاقتـان (۱۸)و (۱۹) الشكار:

$$(\Upsilon \bullet)$$
 $\longrightarrow \cup ((\theta))$ $\longrightarrow \cup ((\theta))$ $\longrightarrow \cup ((\theta))$ $\longrightarrow \cup ((\theta) \tau)$ $\longrightarrow \cup ($

إثبات خاصة أن مقدر المعقولية العظمى طبيعي بالتقارب (في حالة معلمة وحيدة البعد) يعتمد على نشر دالة المساهمة عن $(\theta) = 3$ وميدة البعد) يعتمد على نشر دالة المساهمة وملاحظة هذا المنشور في النقطة $\hat{\theta}$ ، غيد:

$*$
 = $3_{0}(\hat{\theta}_{0}) = 3_{0}(\theta) + (\hat{\theta}_{0} - \theta)$ $\frac{1}{7}(\theta) + \frac{1}{7}(\theta)$ $\frac{1}{7}(\theta)$ $\frac{1}{7}(\theta)$





$$(\gamma\gamma) \qquad \qquad \qquad \frac{3}{\sqrt{\upsilon}} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{(\theta)} \frac{\zeta}{\upsilon} - \frac{1}{\sqrt{\upsilon}} \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{(\theta)} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta)}{\upsilon} \frac{\zeta}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \frac{1}{\upsilon} \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon + \frac{(\theta - \sqrt{\vartheta})}{\upsilon} & -(\theta - \sqrt{\vartheta}) \end{array} \right] \frac{1}{\upsilon} \frac{1}$$

بما أن θ و و الله و الشروط المفروض على الدالة م(س)، وبناءً على الخاصة [(۲) من ۲] ينتج أن ع و الله و ويتطبيق قانون الأعداد الكبيرة علمي المقدار:

$$\frac{1}{c} \stackrel{?}{\ni}_{0}(\theta) = \frac{1}{c} \stackrel{\Sigma}{\stackrel{c}{\rightleftharpoons}_{0}} \stackrel{(w_{0}, \theta)}{\stackrel{(v_{0}, \theta)}{\rightleftharpoons}_{0}} \stackrel{\text{T-ck}}{\stackrel{\text{Lie}}{\rightleftharpoons}_{0}} \stackrel{\text{indicate}}{\stackrel{\text{Lie}}{\rightleftharpoons}_{0}} \stackrel{\text{Lie}}{\stackrel{\text{Lie}}{\rightleftharpoons}_{0}} \stackrel{$$

$$\frac{1}{\sqrt{U}} \underbrace{3_{U}(\theta)}_{\theta} \underbrace{3_{U}(\theta)}_{\theta} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{U}}}_{\theta} \underbrace{\frac{1}{2_{U}}}_{\theta} \underbrace{\frac{1}{$$

آخذين بالاعتبار العلاقتين (٣)، و(٤) نجد:

$$\left(\frac{1}{(\theta)}\right) \circ \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{U}}} \circ \left(\frac{1}{\tilde{U}}\right) \circ \left(\frac{$$

عندما ن $\longrightarrow \infty$. ومن ذلك ومن العلاقة (٢٢) والحناصة [(٤) من ٢] ينتج أن المتغير العشوائي $\sqrt{G}(\theta_{-}\theta)$ له نفس التوزيع الحدي أيضاً، أي أن العلاقة (٢٠) صحيحة.

تعتبر العلاقة (٢١) نتيجة مباشرة للعلاقة (٢٠) والخاصة ٣.





نسمي المقدار $\delta'(\theta)/\upsilon$ بالتباين المقارب للإحصاء σ_0 ، المحقق للشرط: $[(\delta'(\theta))] \to \upsilon(\delta'(\theta))$ و $[(\delta'(\theta))]$

عندما ن $\longrightarrow \infty$ عندئـذ مـن العلاقـتين (٢٠) و(٢١) ينـتج أن التبـاين المقارب لمقدر المعقولية العظمى $\hat{\theta}_0$ (مقدر المعقولية العظمى $\hat{\theta}_0$) ينطبـق علـى الحد الأدنى في متباينة كرامر وراو، من أجل تباينات كل المقدرات غـير المتحيـزة للدالة المعلمية المفروضة.

تعريف: القدر الأكفأ تقاربيياً Asymptotically efficient estimator

إذا كانت $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_0)$ عينة عشوائية من توزيع $\mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{\theta})$ وكان المقدَّر \mathbf{w} المعلمة \mathbf{g} طبيعياً بالتقارب $\mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{e})$ $\mathbf{g}(\mathbf{w})$ ، فإن هذا المقدر يكون الأمثل تقاربياً، ومن ثم الأكف تقاربياً، ومن أجل أي مقدر \mathbf{w} عقيق للشرط:

 $(\Upsilon \Upsilon)$ $(\dot{\upsilon}/(\theta)^{\mathsf{T}} \delta \cdot \theta) \dot{\upsilon} \longleftarrow (\dot{\upsilon}^{\mathsf{T}})_{\theta} L$

فإن كفاءته التقريبية كفاءة (تن، θ) تعين كنسبة الحد الأدنى لمتباينة كرامر وراو إلى التباين المقارب للمقدّر تن:

 $(\Upsilon \xi)$ $[(\theta)^{\mathsf{v}}_{\omega}\delta(\theta)_{\omega}] = [(\xi)^{\mathsf{v}}_{\omega}\delta(\theta)_{\omega}]$ کفاءة (ت (ξ)

ينتج من العلاقتين (٢٠) و(٢٤) الخاصة الثالثة لمقدرات المعقولية العظمي.

٣. يعتبر المقدّر $\hat{\theta}_{0}$ (س) للمعلمة θ أكفأ تقاربياً، أي أن كفاءته المقاربة:

$$\theta \ni \theta \forall : \forall \theta \in \theta$$





مثال (۱۵):

إذا كانت س = (س،،، سن) عينة عشوائية كبيرة من التوزيع:

ق(س؛ θ) = θ ه المحمد θ من θ و فأوجد مقدر المعقولية العظمى لكل من θ ال θ : θ ، θ ، θ أن:

$$U(\omega,\theta) = \theta^{\omega} e^{-i\theta \cdot \overline{\omega}} \quad \text{if} \quad V(\omega,\theta) = 0 \quad \text{if} \quad V(\omega,\theta) =$$

$$\frac{1}{\omega} = \theta \iff \frac{1}{\omega} - \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \frac{\dot{$$

أي أن مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ هـو $\hat{\theta}_{C}(m) = \frac{1}{m}$ ، وبما أن

 θ دالـة تنـاظر أحاديـة في θ ، فـإن مقـدر المعقوليـة العظمـي لــ $\frac{1}{\theta}$ هـو θ و θ

لنحسب الآن معلومات فيشر حول المعلمة θ.

$$\psi_{\mathbb{C}}\left(\theta\right)=-e_{\theta}\left(\frac{c^{\intercal}\log_{\mathbb{C}}\mathcal{L}\left(v_{0}\right)\theta}{c\theta^{\intercal}}\right)=-c_{\theta}\left(\frac{-\dot{\psi}}{\theta^{\intercal}}\right)=\frac{\dot{\psi}}{\theta^{\intercal}}=\dot{\psi}\ \psi(\theta)$$

وعلى ذلك فالتوزيع التقريبي للمقـدر $\hat{\theta}_{v}(\omega) = \frac{1}{v}$ حسب العلاقـة (٢٠)

هو:

$$(\dot{\cup})^{\tau}\theta \cdot \theta)\dot{\cup} = ((\theta)\varphi \dot{\cup})^{\tau}\theta \cdot \theta)\dot{\cup} \approx \left(\frac{1}{\varpi}\right)_{\theta}L$$

وبشكل مشابه فالتوزيع التقريبي للمقدر $\overline{U} = (\theta) = \frac{1}{\theta}$ ، حسب العلاقة (۲۱) هو:



$$\left(\frac{1}{\tau\theta\dot{\cup}}(\frac{1}{\theta})\dot{\cup} = \left(\frac{\tau(\theta)^{\frac{1}{2}}}{\tau\theta/\dot{\cup}},\frac{1}{\theta}\dot{\cup} \frac{1}{\theta},\frac{1}{\theta}\dot{\cup} \frac{\tau(\theta)^{\frac{1}{2}}}{\theta}\dot{\cup} \frac{1}{\theta},\frac{1}{\theta}\dot{\cup} \frac{1}{\theta}\dot{\cup} \frac{1}{\theta}\dot{\cup}$$

إن مقدرات المعقولية العظمى ليست دائماً طبيعية بالتقارب، وكمثال على ذلك، نذكر مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ في توزيع ح (\cdot, θ) ، هـو كما نعلم $\hat{\theta}_0(\omega) = \omega_0$ ، وأن:

$$L_{\theta}\left(\frac{\dot{c}}{\theta}(\theta - \hat{\theta}_{L}(\omega))\right) \longrightarrow \Gamma(1, 1).$$

عندما ن $\longrightarrow \infty$ أي أن التوزيع $\hat{\theta}_0$ (س) المقارب هو توزيع أسي. هكذا، التوزيع المقارب للمقدر $\hat{\theta}(\omega) = \omega_{(\omega)}$ ليس طبيعي، والسبب في ذلك يكون في عدم نظامية النموذج ح $(\cdot \cdot \cdot \theta)$.

طريقة العزوم The method of Momemts

تعتبر طريقة العزوم تاريخياً إحدى اقدم طرق التقدير، والتي قدمت من قبل العالم الإحصائي كارل بيرسون عام ١٨٩٤م. ويتمثل جوهر هذه الطريقة في المساواة بين بعض عزوم المجتمع وعزوم العينة المناظرة لها، فنحصل بذلك على جملة من المعادلات بحلها بالنسبة لمعالم المجتمع نحصل على التقديرات المطلوبة، التي تدعى بتقديرات طريقة العزوم. وبعبارة أخرى تؤخذ العزوم التجريبية (عزوم العينة) كتقديرات للعزوم والنظرية (عزوم المجتمع) الموافقة لها، ومنها نستخلص تقديرات معالم المجتمع بدلالة العزوم التجريبية. لنوضح ذلك على النحو الآتى:

لتكن س = (س،، سن) عينة عشوائية من التوزيع:





 $\{\theta \ni \mu(\mu \, : \, \mu) \in \mathfrak{S} = (\zeta)L$

حيث $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_p)\in\theta\leq - \sigma^p$ ، ولنفترض أن العزوم الإبتدائية الــــ رالأولى للمتغير العشوائي الملاحظ كم موجودة:

$$\infty_{L} = e^{\sum_{i=1}^{L} 1}$$
 $E_{i} = 1, Y_{i}, \dots, X_{L}$

وتعتبر هذه العزوم، بصورة عامة، دوال في المعلمة الجهولة θ، أي أن:

 $\infty_{e} = \infty$ والعزوم الابتدائية التجريبية الموافقة لها:

$$\hat{\mathbb{I}}_{0^{\underline{b}}}(\underline{\mathbf{w}}) = \frac{1}{0} \sum_{i} \hat{\mathbf{w}}_{i}^{\underline{b}}$$

و ∞ي=اي (س) قيم تلك العزوم عند العينة المشاهدة س=(س،، سن) بمساواة العزوم الابتدائية للمجتمع بما يناظرها من عزوم العينة فإننا نحصل على المعادلات:

$$\infty$$
 $(\theta) = 1$ $(b = 1)$ $(b = 1)$ $(b = 1)$

و پحل هذه المعادلات بالنسبة لـ θ_1 ،...... θ_c نـصل إلى التقـديرات $\bar{\theta}_1$,...... $\bar{\theta}_n$ ومن الواضح أن هذه التقديرات دوال في عزوم العينة.

هکن بسهولة إثبات أن عزوم العينة أن (ω) تعتبر مقدرات غير متحيزة ومتسبقة للعيزوم النظرية ∞ (6) لنفرض أن التوافق بين $0_1,\dots,\infty$ و ∞ , ∞ عکن تمثیله بدوال مستمرة وذات تناظر أحادي، أي تواجد دوال مستمرة ∞ , ∞ , ∞ , ∞ أن:

$$\varphi = \varphi_{\omega}(x_1, \dots, x_n)$$





والمقدرات الموافقة: $\overline{\theta}_{\nu}(\omega) = \varphi_{\nu}(1_{1\nu}(\omega),......)$

حسب مبرهنة سابقة فالمقدرات متقاربة احتمالياً، عند كل $\theta \in \theta$ ، من $\theta_{\rm p}$ وهذا يعني أن الإحساءات $\overline{\theta}_{\rm p}$ (س) تعتسبر مقدرات متسقة للمعالم $\theta_{\rm p}$, $y=1,\dots, 1$.

هكذا، طريقة العزوم عند شروط معينة، تعطي مقدرات متسقة. وعندئـذ المعادلات (١) في حالات عدة بسيطة وحلها (خلافاً لطريقة المعقوليـة العظمــــــ) لا يتطلب عمليات حسابية معقدة. ولكن الكفاءة التقريبية للمقدرات التي نحصل عليها بهذه الطريقة اقل من واحد.

مثال (١):

إذا كان س= (m_1, \dots, m_c) عينة عشوائية من توزيع T (θ_1, θ_7) ، فأوجد مقدر كل من المعلمتين θ_1, θ_7 باستخدام طريقة العزوم.

ما أن:

$$\delta(\omega_{i};\theta_{f};\theta_{\gamma}) = \frac{r}{\theta^{\theta_{i}},T(\theta_{r})}$$
ق (س با $\theta_{f};\theta_{\gamma}$ به نامین با نامین با

$$= \underbrace{\text{eal}}_{0} \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{1} \underbrace{\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \int_{0}^$$





لکن: $\infty = \frac{1}{C} \overset{\sim}{\Sigma}_{i}$ 0 ، $\infty = \frac{1}{C} \overset{\sim}{\Sigma}_{i}$ 0 وبالتالي فمعادلي

التقدير هما:

$$\frac{v_{p}}{v_{p}} = \frac{v_{p}}{v_{p}} = v_{p}}{v_{p}} = v_{p}} = v_{$$

أي أن مقدري العزوم. $\overline{\Theta}_{,}$ (س) = $\frac{\overline{U}}{\overline{V}}$ ، $\overline{\Theta}_{,}$ (س) = $\frac{\overline{A}}{\overline{V}}$

مثال (٢):

إذا كانست $w = (w_1, \dots, w_n)$ عينسة عسشوائية مسن التوزيسع (y, θ_1, θ_2) عناوجد مقدر العزوم للمعلمة $\theta = (\theta_1, \theta_2)^{\gamma}$.

California
$$\infty = e_0 \zeta = \theta$$
, $0 = e_0 \zeta = e_0$

وبالمساواة نحصل على المعادلتين: $\theta = \overline{\omega}$ ، $\theta \neq 0 \neq 0$ تحلهما بالنسبة ل $\theta = 0$ بخد:

$$^{t}e^{-\frac{v}{2}}\overline{U^{\mu}} + \overline{^{v}U^{\mu}} = ^{v}_{v}\overline{\theta} \quad \omega = ^{v}_{v}\overline{\theta}$$

أي أن مقــدر العـزوم للمعلمـة $\theta=(\theta,\theta,\downarrow)$: $\theta(m)=(\overline{m},a^{\prime})$ وهــذا نفس مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ .

مثال (٣):

إذا كانت س= (س،، ،...، صن) عينة عشوائية من التوزيع:





ق(س $\theta : \theta$) = θ س $\theta^{-1} \cdot \epsilon \le m \le 1$ فأوجد مقدر العزوم للمعلمة θ .

$$\frac{\theta}{\theta + 1} = \omega \cdot \frac{\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{1}{1} \propto$$

وعلى ذلك:
$$\frac{\theta}{1+\theta}$$
 و سَ $=$ $\frac{\overline{\theta}}{\overline{\theta}}$ وبالتالي مقدر العزوم للمعلمة θ :

$$\overline{\theta}(\omega) = \frac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}}$$
 وهـــو مختلـــف عـــن مقــــدر المعقوليــــة العظمــــى: $\hat{\theta}(\omega) = -\frac{\dot{\omega}}{\dot{\Sigma}}$ المحتوليـــة العظمــــى: $\hat{\theta}(\omega) = -\frac{\dot{\omega}}{\dot{\Sigma}}$

مثال (٤):

إذا كانت $m = (m_1, \dots, m_5)$ عينة عسشوائية مسن التوزيسع الراك و $\beta / m(x) = (5)L$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \zeta_{\theta}$$
 ، $\frac{(1+\alpha)\alpha}{\beta} = \zeta_{\theta}$ ، $(\beta \cdot \alpha) = \theta$ نعلم أن $\theta = 0$ ، $(\beta \cdot \alpha) = 0$. $(\beta \cdot \alpha) = 0$.

نلاحظ أن طريقة العزوم لا تستخدم عندما تكون العزوم من المراتب المطلوبة غير موجودة (فمثلاً، في حالة توزيع كوشي). بالإضافة لـذلك، يقال بشكل عام أن مقدرات طريقة العزوم ليست أكفاً بهذا تستخدم غالباً كتقريب أولي لإيجاد مقدرات أكثر كفاءة نحصل عليها بطرق أخرى (فمثلاً، طريقة التراكم).





طرق أخرى Other methods:

هناك طرق أخرى مختلفة للحصول على مقدرات نقطية للمعالم. نـذكر منها:

الصغرى.

٢. طريقة المسافات الصغرى.

٣. طريقة بتمان.

٤. طريقة بيز.

سندرس بشكل موجز في هذا البند الطرق الثلاث الأولى.

:Minimum – chi – wquare Mefhod طريقة χ الصغرى

يمكن الحصول على مجموعة من الطرق لإيجاد تقديرات معالم توزيع ق $(m;\theta)$ ، وذلك بناءً على صياغة مقياس د بهذه الطريقة أو تلك لقياس إغراف دالة التوزيع التجريبي ق $(m;\theta)$ عن ق $(m;\theta)$ ويعتبر مثل ها المقياس في كل الحالات دالة في العينة $(m;\theta)$ والمعلمة $(m;\theta)$. ود المعلمة $(m;\theta)$.

إذا وجد مثل هذا المقياس، فعندئذ كتقدير للمعلمة θ نأخذ القيمة التي تجعل د تبلغ أصغر قيمة مكنة لها. وإحدى أهم وأكثر مثل هذه المقاييس استخداماً هو ما يدى بمقياس χ' كاي، الذي قدم من قبل العالم كارل بيرسون. ويتعين هذا المقياس (مقياس χ') على النحو الآتي: نقسم مجموعة القيم الممكنة Ω_{λ} للمتغير العشوائي الملاحظ χ' (نطاق χ') إلى ك مجموعة جزئية (خلية)





يشير إلى حدد العناصر العينة $\omega = (\omega_1, ..., \omega_0)$ التي تقع في الخلية χ_1, χ_2 أي أن.

$$\gamma = |\varphi \cdot \psi_{\zeta} = |\psi \cdot \psi_{\zeta}|$$

لنرمز حر(θ) لاحتمال وقوع المـتغير العـشوائي الملاحـظ Σقي الخليـة Σ٫۶ وهذا يمكن إيجاده، بحيث إذا كانت ق(س؛θ) دالة توزيع Σ فإن:

$$\Delta_{c}(\theta) = \sum_{\theta} (\zeta \in \zeta_{\varphi}) = \int_{\zeta_{\varphi}} c_{\theta}(\omega \cdot \theta) \cdot c = 1.....$$

-حيث أن $\sum_{i=1}^{n} \sigma_{i}$

إن التكرار النسبي $\frac{\gamma_c}{c}$ لوقوع عناصر العينة س في الخلية γ_c يعتبر مقدر متسق للاحتمال حر (θ) ، لهذا مقياس انحراف معطيات العينة عن القيم النظرية الموافقعة لها يمكن إعطاء بالمقياس المعرف على الصورة:

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{b} \Leftarrow_{i} (\gamma_{i} \setminus \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{J}_{i}(\mathbf{0}))^{T}$$

إذا وضعنا هنا جر = ن/ حر(θ)، فنحصل على مقايس χ ':

$$\chi \stackrel{\text{\tiny Y}}{=} \sum_{c=1}^{b} \frac{\dot{\upsilon}}{\Im_{c}\left(\theta\right)} \left(\frac{\gamma_{c}}{\dot{\upsilon}} - \Im_{c}\left(\theta\right) \right)^{\text{\tiny Y}} = \sum_{c=1}^{b} \frac{\left(\gamma_{c} - \dot{\upsilon} - \Im_{c}\left(\theta\right)\right)^{\text{\tiny Y}}}{\dot{\upsilon} - \Im_{c}\left(\theta\right)}$$

يمثىل المقدار $\Sigma_{(\gamma,\gamma)}^{-1}$ و (θ) بجموع مربعات الفروقيات بين العدد الملاحظ والمتوقع لوقوع الملاحظات في الخلية $\xi_{(\gamma)}$ = (2π)





(١) على النحو الآتي:

$$\chi^{r} = \sum_{c=1}^{b} \frac{\gamma_{c}^{r}}{\dot{c}_{3}(\theta)} - \dot{c}$$

سترمز للقيمة الملاحظة للمتغير العشوائي γ_{c} بـ ن. وتجـدر الاشــارة هنــا إلى أن مقدر χ' الصغرى يعتمد على التجزأة المقترحة χ_{c} ... χ_{c} .

لاحقاً سنستخدم أحياناً رمزاً آخراً للدلالة على هذا المقياس يدعي بمقياس ٪، وله توزيع ٪.

أن مقدر المعلمة θ ، الذي نحصل عليه من شرط بلوغ المقياس χ' قيمته الصغرى، يدعى بمقدر طريقة χ' الصغرى. وأن هذا المقدر، عند شروط عامة، يتمتع بالخصائص التالية: متسق، طبيعي بالتقارب، والأكفأ تقاربياً (كمقدر المعقولية العظمى).

لإيجاد تقديرات طريقة χ الصغرى يجب حل منظومة المعادلات:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma_{i}^{T}}{\gamma_{i}^{T}(\theta)} \frac{\omega_{i}}{\omega_{i}} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

التي نحصل عليها من الشرط $\frac{\kappa \chi^2}{\epsilon \theta} = 0$ لكن حل هذه المنظومة ليس سهلاً حتى في أبسط الحالات، لهذا نستبدل عادة بمنظومة المعادلات.

التي حلها أبسط بكثير. والمقدرات التي تحصل عليها بناءً على حل منظومة المعادلات (٣)، عند شروط معينة، تنمتع في حالة عينــات كـبيرة الحجــم بــنس





الخواص المقاربة التي تتمتع بها مقدرات طريقة χ^{γ} الصغرى باستخدام حل منظومة المعادلات (γ) .

لهذه الطريقة في تقدير معالم توزيع أهمية عند اختبار جودة الـتلاؤم باستخدام اختبار χ'.

مثال (١):

إذا كانت س = (m_1, \dots, m_n) عينة عشوائية من التوزيع χ (χ) و χ الصغرى:

عندئذٍ:

$$\nabla_{\mathcal{L}}(\theta) = \tilde{\mathfrak{d}}(\mathcal{L} - l^{\frac{1}{2}}\theta) = \frac{\theta^{-1}}{(\mathcal{L} - l)!} = \theta^{\frac{1}{2}}$$

$$\nabla_{b}(\theta) = \sum_{i=b+1}^{\infty} \tilde{b}(b;\theta) = \sum_{i=b+1}^{\infty} \frac{\theta^{b}}{b!} e^{-\theta}$$

$$\dots$$
 ان ق (س؛ θ) = $\frac{\theta^{-\alpha}}{\omega!}$ ه $^{-\theta}$ ب س = ۰، ۱، ...

وعلى ذلك:

$$\frac{c(\theta)}{c(1-\epsilon)} = \frac{1}{(c-\epsilon)!} \frac{(c-\epsilon)!}{(c-\epsilon)!} = \frac{1}{(c-\epsilon)!} \frac{1}{(c-\epsilon)!} \frac{1}{c(1-\epsilon)!} \frac{1}{c($$

$$\theta - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i} \left(\frac{1}{p-1} \right) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}$$





$$=\sum_{l=b}^{\infty} \left(\frac{l}{\theta} - l\right) \tilde{\mathfrak{o}} \left(l \cdot \theta\right)$$

وبالتعويض في (٣) نجد:

$$\sum_{t=0}^{m-1} \left(\frac{c}{\theta} - t\right) \gamma_{t+1} + \gamma_{t} \sum_{t=0}^{m} \left(\frac{t}{\theta} - t\right) \delta\left(t \cdot \theta\right) \setminus \sum_{t=0}^{m} \delta\left(t \cdot \theta\right) = \cdot$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة ل θ نحصل على مقدر طريقة χ^7 المعنوى للمعلمة θ :

$$\theta^{\bullet}(\omega) = \frac{1}{\omega} \left[\sum_{c=0}^{E-1} c \gamma_{c,+} + \gamma_{b} \sum_{c=b-1}^{\infty} b \tilde{\omega}(b;\theta) \Big\backslash \sum_{c=b-1}^{\infty} \tilde{\omega}(b;\theta) \right]$$

نلاحظ أن الحد الأول (ضمن القوسين) يمشل مجمع ملى حيث أن $\sim 2 - 1$ والحد الثاني يساوي تقريباً ملى، حيث ملى $\sim 2 - 1$. (حيث أن $\sim 1 - 1$) ملى القيم الملاحظة للمتغير ك)، أي أن $\sim 1 - 1$

مثال (٢):

لتكن س = (m_1, \dots, m_d) عينة عشوائية من توزيع بيرنولي ب $(1, \theta)$ ، ونريد ايجاد مقدر θ باستخدام طريقة χ^{V} الصغرى.

لناخذ γر = عدد الملاحظات في العينـة س المساوية لــ ر ، ر = ٠ ، ١ . أي أن مدى التغير العشوائي الملاحظ ζ جزء إلى خليتين:

$$\{1\} = \zeta \in \{1\} = \zeta$$

ومن ثم:
$$\chi^{y} = \sum_{i=1}^{r} \frac{[\dot{\upsilon}_{i} - \dot{\upsilon} \supset_{i} (\theta)]^{y}}{\dot{\upsilon} \supset_{i} (\theta)} = \frac{(\dot{\upsilon}_{i} - \dot{\upsilon} \theta)^{y}}{\dot{\upsilon}} \frac{r}{\theta(r - \theta)}$$



$$\int_{\mathbf{Q}} \chi^{r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\dot{\psi}_{i}^{r}}{\dot{\psi}_{i}(\theta)} - \dot{\psi} = \frac{\dot{\psi}_{i}^{r}}{\dot{\psi}_{i}(\theta)} + \frac{\dot{\psi}_{i}^{r}}{\dot{\psi}_{i}} - \dot{\psi}$$

حيث ن ، ر = ۱ ،۱ القيمة الملاحظة للمتغير العشوائي γ_c :

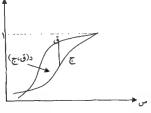
نلاحظ بسهولة أن القيمة الصغرى لـ χ^{γ} كدالة في θ هي عبارة عـن قيمـة χ^{γ} وذلك عنـدما $\theta=\theta^{*}=\frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}}$ ، ومـن ثـم مقـدر χ^{γ} الـصغرى للمعلمـة θ هـو $\theta^{*}(\omega)=\frac{\gamma}{\dot{\psi}}$.

طريقة السافة الصغرى Miumum – Distance method

لتكن س = (m_1, \dots, m_G) عينة عشوائية من توزيع $\mathfrak{g}(m_1, 0)$ ، ولتكن درق، ج) دالة المسافة، اتي تعين التباعد الأقصى بين دالتي التوزيع \mathfrak{g} ، ج وكمثال لدالة المسافة نذكر:

$$|(\bar{b}, \bar{c})| = \bar{b}$$
 (\bar{b}) = \bar{b} (\bar{b}) = \bar{c}

التي تمثل أكبر مسافة شاقولية (رأسية) بين ق وج ويبدو ذلك بوضوح على الشكل (١).



شكل (۱)



إن تقدير طريقة المسافة الصغرى للمعلمة θ وليكن θ * هو عبارة عن القيمة $\theta \in \theta$ التي تجعل e [ق (س؛ θ)، e (س)] تبلغ نهاية صغرى حيث e (س) دالة التوزيع التجريبي هكذا، يتم اختبار θ * بحيث تكون e (س؛ e) الأقرب إلى e (س) ضمن عائلة النموذج e = e (e (س؛ e)، e e e ومن الطبيعي دائماً الرغبة في الحصول على مقدر المسافة الصغرى لكن غالباً إيجاد ذلك أمر صعب. والمثال الآتي يعتبر استثناءً.

مثال (٣):

لتكن س = (س،،،،، سن) عينة عشوائية من توزيع بيرنولي:

لنرمز بـ ن لعدد الملاحظات المساوية لـ ر، ر = ٠، ١. عندئلًا:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

- الآن إذا استخدمنا دالة المسافة د (ق،ج) = قيمة قمصوى إق(m) ج - (س) ، فإن د[ق - (س) ، ق- (س) تبلغ نهاية صغرى إذا أخذنا:

$$(-\theta = \dot{o}) \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} = \dot{o} \cdot \dot{o} \cdot \dot{o} =$$

أي أن مقدر الساحة الصغرى:

 $\overline{\omega} = (\omega)^*\theta$





مقدر بتمان لمعلمة الوضع والمقياس Pitman Estimator of Location and Scale Parametrec لتعرف في البداية معلمة الموضع ومعلمة المقياس.

تعريف: معلمة الوضع Location Parametrec:

إذا كان التوزيع الاحتمالي ق (س؛ θ) للمتغير العشوائي كي يعتمـ عـ معلمة ما θ وحيدة البعد، فيقال أن θ معلمة موضع إذا أمكن كتابـ ق (س؛ θ) كدالة في (س - θ)، أي أن:

$$(\theta - \theta) = (\theta - \theta)$$

حيث ج (١) دالة ما وبعبارة أخرى نقول عن معلمة θ أنها معملة موضع إذا كان التوزيع الإحتمالي للمتغير الشعوائي $\zeta = \zeta - \theta$ ، لا يعتمد على θ ، وتوزيع ζ يكون:

مثال (٤):

إذا كان كم متغير عشوائي دالة كثافته الإحتمالية:

$$0 + > \infty > \infty - e^{\frac{\tau(\theta - \omega)^{1}_{\tau}}{\pi \sqrt{V}}} = (\theta + \infty)$$

فإن θ معلمة موضع لأن $ar{v}(\omega,\theta)$ دالة في $(\omega-\theta)$ وتوزيع $\sigma=\sigma-\theta$ هو $\sigma=\sigma(\omega)=\sigma(\omega+\theta)$

$$(1, 0) = \zeta(L)$$
 فإن $(\zeta) = \zeta(\zeta)$ فإن الخاكان عن (





وكمثال آخر لمعلمة الموضع المعلمة θ في التوزيع ح (θ-١/٢، θ+١/٢) تعريف: معلمة قياس Scale Parameter:

إذا كان التوزيع الاحتمالي ق (س؛ θ) للمتغير العشوائي ζ يعتمد على معلمة θ وحيدة البعد، فيقال أن θ معلمة مقياس إذا أمكن ق (س؛ θ) على الصورة:

ق (س؛ θ) = $\frac{1}{\theta}$ جرن توزیع جرن دالیة میا. وعندئید یکون توزیع المتغیر العشوائی $\zeta = \frac{\zeta}{\theta}$:ج(ص) = ق (θ ص،۱) وهو لا یعتمد علی θ .

مثال (٥):

إذا كان كم متغير عشوائي كثافة توزيعه: قى (س؛ θ) = $\frac{1}{\theta}$ هـ $^{-0/9}$ ؛ س< ، فإن θ معلمة مقياس، لأنه إذا وضعنا $\xi=\frac{1}{\theta}$ فإن كثافة توزيع كم هي:

$$\theta$$
 ب θ ب θ

وكأمثلة أخرى على معلمة المقياس نذكر المعلمـة θ في النمـوذج الطبيعـي $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta}$, $\dot{\theta}$) وكذلك $\dot{\theta}$ في النموذج المنتظم ح ($\dot{\theta}$, $\dot{\theta}$)

* مقدر بتمان لمعلمة الوضع:

تعطي المبرهنة الآتية التي سنقبلها بدون إثبات، مقدر بتمان لمعلمة موضع θ (وحيدة البعد) في التوزيع ق (m, θ) ، وتبين أن لـه أقــل متوسط مربع خطأ بانتظام بين مجموعة مقدرات الموضع.





مبرهنة: إذا كان $m = (m_1, ..., m_0)$ عينة عشوائية مأخوذة من التوزيع ق(m) θ)، وكانت θ معلمة موضع وحيدة البعد، فإن الإحصاء $\pi(m)$ المعرف بالعلاقة:

$$\frac{\theta}{\theta} = \frac{\theta}{\theta} \frac{(\omega^{\theta}) \cdot \omega}{(\omega^{\theta}) \cdot \epsilon \theta} = (\omega^{\theta}) \cdot \epsilon \theta$$

هو مقدر للمعلمة θ بأقل متوسط مربع خطأ بانتظام بين مجموعة مقدرات الموضع، ويدعى هذا المقدر لمعلمة الموضع θ بمقدر بتمان، ومن ثم فإن أيـة قيمـة -= -(س) تدعى بتقدير بتمان لـ θ .

مثال (٦):

إذا كانت $m = (m_1, ..., m_0)$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع ن (θ, δ) فأوجد مقدر بتمان للمعلمة θ .

$$\begin{split} \mathbf{a} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{b} \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{k}} & \mathbf{b} \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}} & \mathbf{b} \sum_{i=1}^{N$$





$$=\frac{\int \frac{\sqrt{\dot{\psi}}}{\sqrt{\gamma}\sqrt{\gamma}}\theta \triangleq \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\sqrt{\gamma}}}{\int \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\gamma}\sqrt{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}$$

نلاحظ أن $\frac{\sqrt{U}}{T\sqrt{T\pi}} = \frac{\sqrt{U-U}}{T}$ ما هي إلا دالة كثافة التوزيع الطبيعي المتغير العشوائي θ متوسط \overline{U} وتباين \overline{U} و بينان التكامل في المقسام يساوي الواحد. أي أن \overline{U} و من أم متحيز فمقدر بتمان: \overline{U} = \overline{U} من متباينة كرامر ورامر، أي أنه المقدر الأمشل (ومن أم الأكفأ) للمعلمة θ .

مثال (٧) :

إذا كانت س= $(m_1, ..., m_0)$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع منتظم $-(\theta - \frac{1}{\gamma} + \theta + \frac{1}{\gamma})$ ، فأوجد مقدر بتمان للمعلمة θ .

 θ با ان θ معلمة موضع في التوزيع ح $\theta - \frac{1}{\gamma} + \theta + \frac{1}{\gamma}$, ق $\theta - \frac{1}{\gamma} = 1$ ؛ $\theta - \frac{1}{\gamma} \ge 0$

$$(0, 0) = 1$$
 $(0, 0) = 1$ $(0, 0) = 1$ $(0, 0) = 0$ $(0, 0) = 0$ $(0, 0) = 1$ $(0, 0) = 0$ $(0$





وعلى ذلك:

$$\theta \stackrel{\downarrow}{\underset{\leftarrow}{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \left(\theta \stackrel{\downarrow}{\underset{\leftarrow}{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \right) e \stackrel{\downarrow}{\underset{\leftarrow}{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \left($$

وبالتائي فمقدر بتمان: ت (س) = $\frac{\omega_{(i)} + \omega_{(i)}}{v}$

* مقدر بتمان لمعلمة مقياس:

إذا كانت $m=(m_0,\dots,m_0)$ عينة عشوائية مـأخوذة مـن توزيـع مـتغير عشوائي $\tilde{\chi}$ يفترض قيماً موجبة ويعتمد على معلمة مقياس وحيدة البعد $\theta>0$ ، فإن المبرهنة الآتية تعطي مقدر بتمان لـ θ :

مبرهنة (٢):

إن مقدر بتمان لمعلمة المقياس θ في التوزيع ق(س؛ θ) للمتغير العشوائي λ يعطي بالعلاقة:

$$\overline{c} = \overline{c}(m) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi$$





مثال (٨):

إذا كانت س= (س،،،،، سن) عينة عشوائية من توزيع منتظم:

$$\theta = \frac{1}{\theta} \ , \ \theta < \omega \leq \theta$$
. فأوجد مقر بتمان للمعلمة θ .

نلاحظ أن θ معلمة مقياس، لأنه بوضع θ نجد:

ج(ص) = ق (θ ص، ۱) =۱ ؛ ۰ < ص < ۱ وهمي لا تعتمد على θ بمــا ان:

$$\theta = \frac{1}{\theta} = \theta$$

فإن تقدير بتمان للمعلمة θ يكون:

وبالتالي مقدر بتمان للمعلمة θ :

$$\mathbf{\hat{U}}(\omega) = \frac{\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{Y}}{\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{V}} = \mathbf{\hat{U}} + \mathbf{Y} = \mathbf{\hat{U}} = \mathbf{\hat{U}} + \mathbf{Y} = \mathbf{\hat{U}} = \mathbf{\hat{U$$

$$\theta = \frac{\dot{0}}{\dot{0}}$$
 کافة توزیع ص $\dot{0}$ هـو: م $\dot{0}$ هـو: م $\dot{0}$ کافة توزیع ص $\dot{0}$ هـو: م $\dot{0}$

وعلى ذلك فإن:

$$\theta = \frac{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \frac{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \frac{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\gamma}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\gamma})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon})}{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} \quad \theta = \theta - \frac{\dot{\upsilon}(\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon} + \dot{$$





 e_{θ} ت $\theta = \frac{1}{(i+1)^{\gamma}}$ وهو مقدر صغیر عندما تکون ن کبیرة.

 θ غير متحيز وبأقبل تباين. ونـترك θ غير متحيز وبأقبل تبـاين. ونـترك إثبات ذلك للقارئ على سبيل المثال.

مثال (٩):

إذا كانت س= (س،،...، سن) عينة عشوائية من توزيع:

ق (س؛ θ) = $\frac{1}{\theta}$ هـ θ ؛ θ > • • فأوجد مقدر بتمان للمعلمة θ . نعلم من المثال (٥) أن θ معلمة مقياس. كما أن:

 \dot{b} (س، θ) = $\frac{1}{\theta}$ هـ $-\Sigma^{\omega}$ وبالتالي فتقدير بتمان للمعلمة θ هو:

$$\mathbf{v}\left(\mathbf{w}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta^{\frac{1}{1-\gamma}}} \mathbf{k}^{-\sum_{i} v_{i} \setminus \theta} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta^{\frac{1}{1-\gamma}}} \mathbf{k}^{-\sum_{i} v_{i} \setminus \theta} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$$

$$= \frac{ \left\lceil \left(\dot{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{\ell} \right) \left(\sum_{i} \boldsymbol{\omega}_{\psi_i} \right)^{\psi + \gamma} \right|}{ \left(\sum_{i} \boldsymbol{\omega}_{\psi_i} \right)^{\psi + \gamma} \left\lceil \left(\dot{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{\ell} \right) \right\rceil} = \frac{ \sum_{i} \boldsymbol{\omega}_{\psi_i}}{ \left(\dot{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{\ell} \right)}$$

ومن ثم فمقدر بتمان:

 $\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}}$ وهو مقدر غیر متحیز بأقل تباین.



تمارين

۱. بفرض س= $(m_1,...,m_0)$ عینة عشوائیة من توزیع:

$$\theta < \theta \leq 0$$
 ق $\theta = \theta$ ق $\theta = \theta$ ق $\theta = \theta$

۱. أوجد مقدر المعقولية لـ θ ، ثم بين أن كل متحيزاً أم k.

۲. أوجد مقدر العزوم للمعلمة θ ، ثم بين أن كان متحيزاً أم V.

۲. لتکن س= (س،،،،، سن) عینة عشوائیة من توزیع:

$$\infty+>\theta>\infty-$$
 و $\theta=\frac{1}{2}$ ه $\theta=0$

١. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـθ.

۲. أوجد مقدر العزوم لـθ.

٣. أوجد مقدر بتمان لـθ.

 θ التوزيع ق θ التوزيع ق θ الأسية الأسية على ينتمي التوزيع ق θ

۳. لـــتكن س= (س،،،،، سن) عينــة عــشوائية التوزيــع: ق(س؛ θ)= $\frac{1}{\theta}$ ؛

 $\bullet \leq$ س $\leq \theta$ ، $\theta > \bullet$.

 أ. أوجد مقدر θ باستخدام طريقة العزوم، وإذا رمزنا لـه بــ ت، فأوجــد متوسطه ومتوسط مربع الخطأ له.

 ϕ . أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ θ وإذا رمزنا لـه بـ ϕ ، فأوجد





متوسطه ومتوسط مربع الخطأ له.

ج. أوجد المقدر الأكفأ لـ θ ، وإذا رمزنا لـه بـ ت،، فأوجد متوسطه ومتوسط مربع الخطأ له.

د. إذا رمزنا بـ ت٥ = س(١) + س(ن)، فأوجد متوسط ومتوسط مربع الخطأ له.

ن توزیع (س،،،،،، سن) عینهٔ عشوائیهٔ من توزیع (س،،،،،، عنهٔ عشوائیهٔ من توزیع

$$\bullet < \theta$$
 ، $0 = \theta$ س $0 = \theta$ ق (س $0 = \theta$) $0 = \theta$

أ. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ
$$\tau(\theta) = \frac{1+\theta\xi}{\theta+1}$$

 ϕ في مقدر غير متحيز بأقل تبين θ

٥. لتكن $m = (m_1, ..., m_6)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$\cdot < \theta$$
 ، $\theta = (\theta + 1)^{-(\theta+1)}$ ؛ س $\theta = (\theta + 1)^{-(\theta+1)}$

 θ باستخدام طريقة العزوم.

$$\frac{1}{\theta}$$
 =(0)T اوجد مقدر المعقولية العظمى لـ τ

٣. أوجد مقدر المعقولية لكل من الدوال:

$$\frac{\theta Y}{\theta + \theta}$$
 , $\theta_{+\theta}$, $\frac{Y}{\theta + \theta}$

۳. لــتکن س= (س،،...، سن) عینــة عــشوائیة مــن توزیــع: ق $(س, \theta)$ = $\frac{l_{2.0}\theta}{2}$ θ = 0.0 θ = 0.0





- ١. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـθ.
- ٢. هل يوجد المقدر الأمثل θ ، إن وجد فما هو؟
- ∞ . أوجد توزيع مقدر المعقولية لـheta عندما نho
- 3. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ $T(\theta) = 1 / (1+\theta)$ ، ثم أوجد توزيعه عندما ن $\longrightarrow \infty$.

$$\bullet < \theta$$
 ، $(0, 0) = + \frac{\omega}{\gamma} \theta$ (1 - $(0, 0)^{\gamma-\omega}$ با س = $(0, 1)$ با $(0, 0)$

- ١. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ θ^{Y} ، هل هو غير متحيز؟
 - المل يوجد المقدر الأمثل لـ⁷θ.
- ". أوجد توزيع مقدر المعقولية العظمى لـ θ عندما ن $\longrightarrow \infty$.
 - 3. هل مقدر المعقولية العظمي لـ θ^{T} متسق.

۸. لتكن س=
$$(m_1,...,m_0)$$
 عينة عشوائية من توزيع: $\theta = 0$

$$\frac{1}{2}(\omega_{0};\theta) = \begin{cases}
\frac{1}{2}(-\omega_{0})^{2} & \text{if } 0 < \omega \leq \theta \\
\frac{1}{2}(-\omega_{0})^{2} & \text{if } 0 < \omega \leq \theta
\end{cases}$$

حيث ١≥θ≥١

- . مقدر θ بطريقة العزوم.
- Y = ن = ۱ و ن = ۲. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ θ من أجل ن = ۱ و ن
 - ٣. أوجد المقدر الأمثل لـ θ عندما ن = ١ (إن وجد).
 - أوجد مقدر المعقولية العظمى لـθ.





- Θ. بفرض $ω = (ω_ι, ω_ι)$ عینة عشوائیة من توزیع: ق $(ω, θ) = ω_ι^{-(ω_l)}$
 - ١. أوجد مقدر المعقولية العظمي لـθ.
 - ۲. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta) = \frac{1}{A}$
 - ٣. أوجد مقدر العزوم للمعلمة θ.
 - ٤. أوجد توزيع مقدر المعقولية العظمي ك.θ.
- ، ۱ ، بفرض س= (س،،،،، سن) عینهٔ عشوائیهٔ من توزیع ق $(m; \theta) = \frac{\gamma_w}{v_\theta}$ ،
 - $\theta > 0$, $\theta > 0$
 - ا. مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ .
 - ۲. مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau_1(\theta) = 1/|\theta|$
 - ۳. مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau_{\gamma}(\theta) = (1 + \theta)$ هـ θ
 - ۱۱. بفرض س= (س،،،،، سن) عینة عشوائیة من توزیع $\tau(\theta)$ ، λ).
 - $\frac{\lambda}{\theta}=\frac{1}{\theta}$ هو $\hat{\tau}=\frac{1}{\theta}$ هو $\hat{\tau}=\frac{1}{\theta}$ هو $\hat{\tau}=\frac{1}{\theta}$
 - ٧. هل المقدر أن متسق.
 - ∞ . أوجد توزيع $\hat{\tau}_0$ عندما ن $\longrightarrow \infty$
 - ۱۲. اثبت أن: $\hat{\theta}(\omega) = \frac{\omega}{(\omega+\omega)}$ ، $\omega = \frac{1}{\omega} \sum_{i,j=1}^{\omega} \omega_{i,j}$

مقدر المعقولية العظمى لـ θ في النموذج $\overline{\psi} = (\chi, \theta)$ ، ثم احسب التباين التقريبي له، بفرض ن كبيرة.





۱۳. ليكن ζ متغير عشوائي يخضع للتوزيع: ق(س؛ θ) = (٢س/ θ)هـ $^{-\omega\gamma/\theta}$ ؛ $\omega \geq ^{\circ}$ أوجـد مقـدر المعقوليـة العظمـى لــ θ بنــاء علـى عينـة عـشوائية $\omega = (\omega_{1}, \ldots, \omega_{6})$.

١٤ لدينا عينة عشوائية ((س١، ص١)،...، (سن، صن)) من توزيع طبيعي ثنائي
 البعد:

۱۰ لتکن $m = (m_1, \dots, m_0)$ عینة عشواثیة من توزیع: ق $(m, \theta) = \frac{1}{\theta}$ ب $\theta \leq m \leq 7$

أوجد المعقولية العظمى لـ θ

٢. اوجد مقدر بتمان ـ θ

۱۲. إذا كانت $m = (m_1, \dots, m_0)$ عينة عشوائية من توزيع $\mathbf{p}(\theta_1, \theta_1)$.

فأوجد مقدر المعقولية العظمى ومقدر العزوم لـ θ = (θ_1, θ_2)

۱۷. إذا كانت ((س، ص،)،...، (س، ص،)) عينة عـشوائية مـن توزيـع طبيعـي ثنائي:





التكامل المعتل



الفصل السابع التكامل المعتل

تعريف:

يعرف التكامل المعتل بأنه تكامل محدد تكون حدود هذا التكامل تملك حالة خاصة فإما أن تكون نقطة انقطاع للتابع المكامل أو أن تكون لا نهائية.

ومن التعريف يتضح أن هنالك نوعان هامان من التكامل المعتل وهما:

١. التكامل المعتل من النوع الاول.

ويعرف بأنه التكامل المحدد التنابع مستمر ق(س) ومحمدود علمي مجمال لا نهائي.

٢. التكامل المعتل من النوع الثاني.

ويعرف بأنه التكامل المحدد التابع ق(س) غير محدد على مجال محدود.

التكامل المعتل من النوع الأول:

تعریف:

هو التكامل المحدد لتابع مستمر ومحدود على مجال لا نهائي ويأتي على أحد الأشكال الآتية:

1.
$$b = \tilde{\beta} \tilde{g}(w) = c \ w \ \dot{y} \ \dot{y} = \tilde{\zeta} \tilde{g}(w) = c \ w \ \dot{z} = 0$$





في الواقع سنناقش في دراستنا التالية الحالة (٩) وسوف نعمم نتائجنا على باقي الحالات.

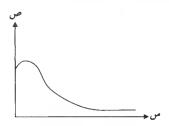
الآن لننظر إلى التكامل ل = $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ ق(س) = د س حيث ق(س) كمول كتكامل عدد على الجالات [$\{$ ، س] مهما تكن س \in ح $^{+}$

ويمكننا الكتابة أن إُق(س).سد = نهـــا أٍق(س).د س

ونقـول عنـدها أن التكامـل المعتـل ل يكـون متقاربـاً إذا كانـت النهايـة نهــــاً إن اللهايـة النهايـة النهايـة اللهايـة اللهائية عندئذ نقول المدارك اللهائية عندئذ نقول المدارك المعتل ل غير موجود أو متباعد.

المفهوم الهندسي للتكامل المعتل من النوع الأول:

يعطينا تعريف التكامل المعتل من النوع الأول تعبيراً بأنه المساحة الـ ي يحصرها التابع ق(س) مع المحور س حتى اللانهاية.







قاعدة نيوتن – لا يبنتيز: إذا وجد للتـابع ق تابعــاً أصــلياً ق عندئــذ يمكــن الكتابة

 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{b}(\omega). \omega = \omega_{\text{con}} \, \frac{1}{2} \, \tilde{b}(\omega) - \tilde{b}(0) \, e^{-\frac{1}{2}} \, \tilde{b}(\omega) + \tilde{b}(\omega) + \tilde{b}(\omega) = 0$

مثال:

احسب التكامل ل =
$$\sqrt[n]{\frac{c}{1+u}}$$

: 141

$$= 0 \qquad \qquad = 0 \qquad =$$

مثال:

ادرس تقارب التكامل ل
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{\omega} \frac{\omega}{\omega}$$
 وذلك حسب قيم λ .

أولاً: في حالــــة $\lambda = 1$ نجــــد أن ل $= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\omega}}{\omega} = \frac{1}{2}$ النجا نورس لورد النهاية الأخيرة غير موجودة وبالتالي فالتكامل متباعد.

ثانيــــاً: في حالــــة
$$\lambda \neq 1$$
 عندقــــذ فــــان ل = $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-1}$ عندقـــذ فــــان ل = $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-1} \frac{1}{\lambda-1} \frac{1}{\lambda-1} \frac{1}{\lambda-1} = \frac{1}{\lambda-1} \frac{1}{\lambda-1}$ الأن من أجل النهاية في الطرف الأيمن نجد أن إذا





کان ۱ $-\lambda < 0 \Longrightarrow \lambda > 1 \Longrightarrow 0$ نجاس التكامل موجوداً ومتقارباً.

أما إذا كان ١- $\lambda > 0 \Longrightarrow \lambda < 1 \Longrightarrow 0$. وبالتالي يسمبح التكامل متباعداً.

خلاصة:

یکون التکامل ل = $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{\omega}$ موجوداً ومتقارباً عندما تکون $\lambda < \lambda$ ویسمی هذا التکامل تکامل ریمان ٔ

وفي عدا هذه الحالة يكون هذا التكامل متباعداً.

مثال:

ادرس تقارب التكامل ل = أ جنا س.د س

 $b = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} dt$ من النهاية في الطرف الأيمن غير موجودة. وبالتالي فإن التكامل المعتل غير موجودة.

ملاحظة:

هكن رد دراسة تقارب التكامل المعتل من النبوع الأول إلى دراسة التابع الموجدود في النهاية حسب تعريف التكامل المعتل $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbb{D}}(w)$. دس = نها أي (w) د س





ولذلك فإننا لن نستغرب إذا رأينا معاييراً مماثلة لمعايير تقارب التوابع.

ملاحظة آخري:

تعميم:

وأيضاً من أجل التكامل ك = $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}(w)$. دس ويمكن كتابته بالشكل:

ويمكن كتابة دستور نيوتن – لايبنتيز بالشكل:

$$(1)$$
 دس = نهاق(ا) - نهاق(اً) دس = نهاق(اً) دس = نهاق(اً)

تبديل المتحول في التكامل المعتل من النوع الأول:

إذا كان لدينا إَقَ(س). دس وفرضنا س = Ψ(ت) عندشذ دس= Ψ(ت) ويمكن عندها كتابة التكامل بالشكل:





الحل:

وعندئذ يصبح التكامل

$$U = \int\limits_{-\tau}^{\infty} \frac{c\omega}{r} = \frac{r}{r} \left[\frac{1}{c} - \frac{r}{r} \right]^{\infty} = \frac{r}{r} \left[\frac{1}{r} - \frac{r}{r} - \frac{r}{r} - \frac{r}{r} \right] = \frac{r}{r} \cdot \left[\frac{r}{r} - \frac{r}{r} \right] = \frac{r}{r} \cdot \left[\frac{r}{r} - \frac{r}{r} - \frac{r}{r} - \frac{r}{r} \right] = \frac{r}{r} \cdot \left[\frac{r}{r} - \frac{r}{r} -$$

ملاحظة:

بعض التكاملات المعتلة من النوع الأول لتصبح تكاملات غير معتلة لدى إجراء تبديلاً للمتحول فيها.

مثال:

بملاحظة التكامل ل=
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c^{n0}}{\sqrt{(n-1-r)}} \cdot \frac{1}{(n-1-r)}$$
. الآن بإجراء تبديلاً للمتحول

$$\frac{1}{\gamma}$$
 + = ت \Longrightarrow ۲= بالشكل س = $\frac{1}{2}$ غبد أن دس = $\frac{-c \dot{\nu}}{2}$ وتصبح حدود التكامل س = ۲





$$m=\infty \Longrightarrow = \frac{1}{100}$$
 وبالتالي يصبح التكامل

طريقة التجزئة في التكامل المعتل من النوع الأول:

مثال:

احسب التكامل ل =
$$\int_{0}^{\infty} u \, e^{-u} \cdot c u$$
 الآن لنطبق دستور التجزئة وذلك باختبار $a = u - u$ د د $a = u - u$ د $a = u - u - u - u$ د $a = u - u - u - u$ د $a = u - u - u - u - u$ د $a = u - u - u - u - u - u$ د $a = u - u - u - u - u - u$ د $a = u - u - u - u - u - u - u$

$$1=1+0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}$$





خواص التكامل المعتل من النوع الأول:

في الواقع باعتباره حالة خاصة من التكامل المحدد يمكن أن نــورد الخــواص التالية:

دس =
$$\alpha$$
 فرس). دس α فرس). دس α

۲.
$$\tilde{\vec{j}}$$
 قرس ± 3 (س). دس ± 3 قرس) دس دس

$$^{\circ}$$
 . $^{\circ}$ ق کان ق $^{\circ}$ ع (س). دس إذا کان ق $^{\circ}$ ع (س).

3.
$$\left| \tilde{\vec{j}} \tilde{b}(\omega) \cdot \omega \right| \leq \tilde{\vec{j}} \left| \tilde{b}(\omega) \right| \cdot \omega$$

معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول:

أ. ميرهنة الشرط اللازم:

إذا كان التكامل أَ قَ(س). دس موجوداً ومتقارباً فإن نهـــاق(س)=.

ب. شرط كوشي لتقارب التكامل المعتل من النوع الأول:

إن الشرط الــلازم والكــافي لكــي يكــون التكامــل ۚ قَـ(س). دس موجــوداً ومتقارباً هو أن يكون

$$\forall \ 3 > \circ : \exists \ \uparrow (3), \uparrow_{f} > \uparrow_{f} > \uparrow_{f} \geqslant \downarrow (3) \Longrightarrow \left| \begin{matrix} \downarrow \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right| \underbrace{\vdots}_{f} \underbrace{\vdots}_{f}$$





== أَ ف(س) دس < € . .

في الواقع أن التطبيقات العملية لشرط كوشي تكون معقدة في غالب الأمر لذلك يفضل استخدام معيار شرط كوشمي في المبرهنات فقط أما في حمل المسائل فسندرس معاييراً أكثر سهولة وأقل طولاً.

يمكن في الواقع تقسيم معايير تقارب التكاملات المعتلة إلى صنفين وفــق إشـــارة ق(س).

أ. التكاملات المعتلفة من النوع الأول الموجبة:

 $\bullet \leq (m)$ تعریف: نقول أن التکامل المعتل ل $= \int \hat{\phi} (m)$. دس إذا کان ق

١. المعيار الأول:

في الواقع إذا أخذنا التكامل المحدد التالي $\Psi(m)=\int\limits_0^\infty \bar{b}(m)$. دس عندئد فإن التابع $\Psi(m)$ متزايداً كون ق(m)> وبالتالي فإن هذا التابع بملك نهاية عندما $m\longrightarrow\infty$ إذا كان محدوداً من الأعلى. ويمكن تلخيص المعيار بالشكل:

یکون التکامل ل= $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{b}(w)$. دس موجوداً إذا کان التـابع $\psi(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{b}(w)$. دس محدوداً من الأعلى.

مثال:

برهن على وجود التكامل ل = $\int_{1}^{\infty} \frac{cw}{\sqrt{v}}$





سنلاحظ أن $\psi(m)=\int\limits_{1}^{\infty}\frac{c\,w}{w^{\frac{1}{\gamma}}}=\int\limits_{0}^{1}-\frac{1}{w}$ وبملاحظة أن $\psi(m)<\frac{1}{2}$ عندئـذ فإن التكامل ل موجود بالتقارب.

٢. معايير المقارنة:

أ. إذا كـان $^{\circ} \leq \bar{g}(m) \leq ^{3}(m)$ عندئـــذ فــإن تقـــارب التكامــل $\ddot{\tilde{q}} \bar{g}(m)$. دس يؤدي إلى تقارب التكامـل $\ddot{\tilde{q}} \bar{g}(m)$. دس وتباعــد التكامـل $\ddot{\tilde{q}} \bar{g}(m)$. دس يؤدي إلى تباعد التكامل $\ddot{\tilde{q}} \bar{g}(m)$. دس

الرهان:

في الواقع باستخدام الخاصية – ٣ – في التكامـل المحـدد نجـد أن: $\mathring{\|}$ ق(m). د $m \leq \tilde{\|}$ ع(m). د $m \leq m$

 اذا كانت النهاية اليمنى موجودة فإنه وحسب خواص النهايات تكون النهاية اليسرى موجودة وهذا ما نعبر عنه بالكتابة.

إذا كانت النهاية اليسرى غير موجودة فإنه وحسب خواص النهايات
 تكون النهاية اليمنى غير موجودة وهذا ما نعبر عنه بالكتابة.

إذا كان إ قراس). دس متباعداً فإن إ ع(س). دس يكون متباعداً أيضاً.





 \cdot إذا كان لدينا ع(س) \leq ق(س) \leq م.ع(س) \cdot \leq م عندئلو فإن التكاملات $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{c}(w)$. دس و $\int\limits_{-\infty}^{\infty} 3(w)$. دس من نوع واحد من حيث التقارب والتباعد.

البرهان:

يتم برهان هذه القضية إذا استخدمنا معيار المقارنة – أ – بالشكل الأول. أولاً:

بالنظر إلى م. ع(س) \geq ق(س)، فبإذا كانىت أَعْراس).د س متقارباً فبإن قارس).د س متقارباً وإثبات التباعد ويتم بنفس الطريقة وبالتالي نستطيع الكتابة أنة:

يكون إْعْ(س).د س متقارباً إذا وفقط إذا كان إْق(س).د س متقارباً.

وبالتالي أع(س).د س و أق(س).د س من نوع واحد.

ج.. إذا كان ق (س) و ع(س) تابعين موجبين بحيث أن نها قر(w) = 0

 $\varepsilon > |J - \frac{\delta(u_0)}{\delta(u_0)}| \iff \delta < |J - \delta| : (\varepsilon) \delta = 1$ (e) $\delta = 1$ (for $\delta = 1$ (for $\delta = 1$) $\delta = 1$

 $\Rightarrow -3 < \frac{\tilde{\upsilon}(\omega)}{3(\omega)} - \upsilon < 3 \Rightarrow \upsilon - 9 \leq \frac{\tilde{\upsilon}(\omega)}{3(\omega)} \leq \upsilon + 3$

وباختبار م = ل + ع و م = ل - ع نجد أن:

 $a \leq \frac{\tilde{\upsilon}(\omega)}{\tilde{\upsilon}(\omega)} \leq a \implies a \leq (\omega) \leq \tilde{\upsilon}(\omega) \leq a \leq (\omega)$





ونحسن عندئد أمسام معيسار المقارنــة - ب- وبالتسالي ${\tilde {\tilde {\tilde {\bf j}}}}$ ${\tilde {\bf j}}$ ${\tilde {\bf j}}$

مثال:

ادرس تقارب كلاً من التكاملات التالية:

۱ <
$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+1} \frac{1}{1+1}$$

۱< أ
$$\frac{\omega}{\sqrt{m}}$$
 من أجل ا

الحل:

۱. من أجل ل =
$$\int_{1}^{\infty} \frac{c}{\omega}$$
 سنلاحظ أن $\sigma < \frac{1}{c}$

٣. بملاحظة أنه من أجل $\frac{3}{1} \frac{c}{\sqrt{w}}$ إذا استخدمنا معيار المقارنة – جـ – ولاحظنا





أن التكامل $\frac{c}{|u|} \frac{c}{|u|} \frac{v}{|u|}$ متقارباً نجد أن نهب $\frac{1}{|v|} \frac{v}{|u|} = \frac{1}{|u|} \frac{v}{|u|} = 0$ وبالتبالي التكاملين $\frac{c}{|u|} \frac{v}{|u|} = \frac{c}{|u|} \frac{v}{|u|}$ ليسا من نبوع واحد وبالتبالي فإن $\frac{c}{|u|} \frac{v}{|u|}$ متباعد.

تعريف التقارب بالإطلاق:

تعريف: نقول عن التكامـل إَّ قَ(س). دس أنه متقــارب بــالإطلاق إذا كــان التكامل إَّ إقـ(س) |. دس متقارباً

مبرهنة: إذا كان التكامل إَّ إقارس|. دس متقاربًا فــإن أَقارس). (دس) يكــون متقاربًا.

البرهان:

أولاً بكتابة شرط كوشي من أجل التكامل $\|\tilde{|}[ar{z}(m)]\|$. دس نجد أن

وبالتالي نجد أن شرط كوشي محققاً من أجـل ${\tilde{\beta}}$ ق (س). دس وبالتـالي فهـو متقارب.





ملاحظــة: عنــدما يكـــون ۚ إِقَ(س). دس متقاربــاً ونجــد أن ۗ إلى(س)|. دس متباعداً عندثذ نقول أن تقارب التكامل ۚ إق(س). دس هو تقارب شرطي.

ب. التكاملات المعتلة ذات الإشارة الكيفية:

تعريف: نقول عن التكامل المعتل ل = ۚ قَـ(س). دس أنه ذو إشارة كيفية إذا كانت إشارة التابع ق(س) لا تملك انتظاماً.

من أجل هذه التكاملات لدينا معيار يعتمد على مفهوم التقارب بالإطلاق.

فإذا كنا امام التكامل المعتل ذو الإشارة كيفية ل = ﴿ قَا(س). دس فسندرس تكامل القيمة المطلقة الخاص به ل= ﴿ إَقَاسَالَ اللَّهُ عَلَى اللَّهُ اللَّهُ عَلَى اللَّهُ عَلَى اللَّهُ عَلَى اللَّهُ عَلَى اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ عَلَى اللَّهُ اللّهُ اللَّهُ اللَّاللَّهُ اللَّهُ اللَّا اللَّهُ اللَّهُ اللَّا اللللَّالِ اللَّهُ اللَّالِمُ اللَّا اللَّهُ اللَّهُ الللَّالِمُ ال

أما إذا كان ل متباعداً عندها لا يمكننا الجزم بشيء.



- التـشــاكـــل والتمــاثـــل
- المثاليات الأولية والعظمي
- معادلات الفروق الخطية دات الرتبة الثانية
- المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتامال
- نظرية رول نظرية التزايدات
 المحدودة الأوضاع غير المعينة
- طـــرق ايــجـاد مقدرات النقطة
- التـكـــامـــل المعـــــل





المُلكَة الأرمنية الهياشتمية = عنصان - شناع اللك حسين محمع الفحسيس التجباري - هناشف ، 11169 6 6 69+ تتفاكس ، 1199 6 4 66+ ص بـ 22762 عيمان 1119 الأرمن E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net

